Mellen W. Haskell

Göttingen, 1888.

DIE GRUNDLAGEN DER THEORIE DES LOGARITHMISCHEN POTENTIALES UND DER EINDEUTIGEN POTENTIALFUNKTION IN DER EBENE.

VON

DR. AXEL HARNACK
PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite
Einleitung 1

Erstes Kapitel.

Allgemeine Sätze über das logarithmische Potential und die Potentialfunktion.

§ 1. Definitionen des Potentiales 6
§ 2. Die partielle Differentialgleichung desselben und deren allgemeines Integral 9
§ 3 und 4. Die Potentialfunktionen im Kreissektor und Rechteck. . . . 12. 19
§ 5 und 6. Das Potential einer Flächenbelegung und die Differentialgleichung im Innern der Masse 20. 22
§ 7 und 8. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung und ihr analytischer Charakter 24. 27
§ 9. Das Potential einer Kurvenbelegung. Die Differentialgleichung am Rande 29
§ 10. Das Potential einer Doppelbelegung und die Gleichung zwischen den Randwerten desselben 34
§ 11. Die Integralgleichungen der Potentiale 38
§ 12. Die Greenschen Integralsätze 43
§ 13. Die Maxima und Minima der Potentialfunktion 47
§ 14. Die Integralrelation zwischen den Randwerten einer Potentialfunktion und ihren Ableitungen nach der Normalen 49
§ 15. Die Gleichungen zwischen den Differentialquotienten des Potentiales einer Doppelbelegung 51
§ 16 und 17. Die konjugierte Funktion und das komplexe Integral von Cauchy 53. 55
§ 18. Die Niveaulinien und Knotenpunkte 59
§ 19. Grenzbestimmungen für die Werte einer Potentialfunktion. 61
§ 20. Unendliche Reihen von Potentialfunktionen 65

Zweites Kapitel.

Die zur Bestimmung einer Potentialfunktion ausreichenden Bedingungen. Die Eigenschaften der Greenschen Funktion und der natürlichen Belegung.

§ 21 und 22. Bedingungen zur eindeutigen Bestimmung 69. 70
§ 23. Definition der Greenschen Funktion und Beweis ihrer wichtigsten Eigenschaften 71
§ 24. Die Greensche Darstellung einer Funktion im Innern einer Kurve mittels ihrer Randwerte 75
§ 25 und 26. Die Greensche Funktion für den Kreis und das Rechteck . . 76. 77
§ 27 und 28. Das Potential der natürlichen Belegung und die allgemeinen Sätze zur Darstellung eines Potentiales für das äussere Gebiet einer Kurve 79. 83

Drittes Kapitel.

Die Neumannsche Methode zur Konstruktion einer Potentialfunktion aus ihren Randwerten.

Seite

§ 29. Die zugeordnete Funktion und ihre Eigenschaften 86
§ 30. Die Konvergenz der zugeordneten Funktionen nach einer Konstanten 89
§ 31 und 32. Die Bildung der Potentialfunktion für das innere und für das äussere Gebiet einer Kurve bei stetigen Randwerten 94. 95
§ 33. Verhalten bei Unstetigkeitsstellen der Randwerte 96
§ 34. Lösung der Aufgabe auch bei unstetigen Funktionen 100
§ 35. Weitere Grenzbestimmungen für die Werte einer Potentialfunktion . 102
§ 36. Darstellung einer Funktion aus den Werten ihrer Ableitungen nach der Normalen 104

Viertes Kapitel.

Die Existenz der Potentialfunktionen für Polygone und beliebig berandete, einfach oder mehrfach zusammenhängende Flächen.

§ 37. Die Kombinationsmethode angewandt auf Polygone mit einspringenden Winkeln 109
§ 38. Eine zweite Methode für dieselben 113
§ 39. Nachweis der Existenz der Greenschen Funktion für eine beliebig berandete Fläche 116
§ 40. Nachweis, dass mittels eines Grenzwertes des Greenschen Integrales eine Potentialfunktion durch ihre Randwerte definiert wird, falls diese stetig sind 121
§ 41. Die Eindeutigkeit der Funktion auch bei Unbestimmtheit in einzelnen Randpunkten 129
§ 42. Die analytische Fortsetzung der Potentialfunktionen und Potentiale . 132
§ 43. Das Greensche Integral bei analytischem Charakter des Randes und beliebiger Beschaffenheit der Randwerte 135
§ 44. Das Verhalten der Funktion in Ecken und Spitzen 141
§ 45. Die Konstruktion von Funktionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten 142

Fünftes Kapitel.

Bemerkungen zur Theorie der konformen Abbildung und der Transformation durch reciproke Radien.

§ 46. Die konforme Abbildung einfach zusammenhängender, endlicher Flächen auf den Kreis und die Halbebene 148
§ 47. Die Transformation von Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken, durch reciproke Radien 151
§ 48. Die konforme Abbildung dieser Flächen 153
§ 49. Die Abbildung des äusseren Gebietes von geradlinigen Polygonen . . 154

Einleitung.

Die allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, welche von Cauchy begründet, aber zugleich in den Arbeiten von Gauss, Abel und Jacobi von Anfang an mit vollendeter Sicherheit enthalten ist, hat Riemann in seiner Inaugural-Dissertation (Göttingen 1851) in neuer Form auszuführen gesucht. Es kam ihm darauf an, die Definition solch einer Funktion unabhängig zu machen von ihrem analytischen Ausdruck bei jedem Wert des Argumentes, und statt dessen die Funktion durch notwendige Bestimmungsstücke vollständig zu definieren, aus denen alle ihre Eigenschaften folgen. Denn es ist, wie Dirichlet in seiner Gedächtnisrede auf Jacobi sagt, die immer mehr hervortretende Tendenz der neueren Analysis, Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen. In den Riemannschen Arbeiten über die Abelschen Funktionen, über die linearen und partiellen Differentialgleichungen ist dieselbe am entschiedensten durchgeführt worden.

Aber für einen Hauptsatz in dieser Theorie, dass die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ stets ein Integral besitzt, welches am Rande eines beliebigen ebenen Gebietes vorgeschriebene Werte erhält, wurde der Beweis, welchen Riemann in der Ebene, und in ganz analoger Weise Gauss und Dirichlet für die Potentialfunktion im Raum gegeben hatten, von Herrn Weierstrass als unzureichend erkannt. Der Inhalt des Satzes selbst, der eine wesentliche Eigenschaft der Potentialfunktionen (und sonach auch der Funktionen einer komplexen Veränderlichen) aussagt, welche für das Verständnis derselben nicht wohl entbehrt werden kann, liess einen vollständigen Beweis desselben wünschen. Denn ohne den Satz ist es nicht möglich, die Abbildbarkeit eines beliebigen, einfach zusammenhängenden Gebietes auf den Kreis zu behaupten, oder die Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen aufeinander zu untersuchen; auch lässt sich ohne ihn die Theorie der Abelschen Integrale in der übersichtlichen Weise Riemanns nicht beibehalten. Desgleichen beruhen die neueren Ar-

beiten der Herren Klein und Poincaré teilweise wenigstens auf der Giltigkeit dieses Satzes, der überdies für physikalische Aufgaben in der Ebene und im Raume Bedeutung hat.

Es ist das grosse Verdienst der Herren Schwarz und Neumann, dass sie sichere Beweise unter gewissen Einschränkungen geliefert haben. Indem ich über diese Arbeiten kurz referiere, möchte ich erkennen lassen, welche Lücke mich zu meinen Studien veranlasst hat.

Herr Schwarz hat das Problem vornehmlich in zwei verschiedenen Arbeiten behandelt. Die erste derselben: „Zur Theorie der Abbildung"* geht von dem Satze aus, dass jedes von geradlinigen Strecken begrenzte Polygon auf einen Kreis konform abbildbar ist, ein Satz, der zugleich von Herrn Christoffel in expliciter Form ausgeführt worden ist.** Lässt man das Polygon mehr und mehr in eine einfach geschlossene Kurve übergehen, so wird schliesslich die konforme Abbildung der von dieser Kurve begrenzten Fläche auf einen Kreis — oder genauer gesagt: die Existenz der Greenschen Funktion — mittels bestimmter Konvergenzmethoden erkannt. Diese Methoden sind aber so formuliert, dass die begrenzende Kurve als überall konvex nach aussen angenommen werden muss. Sie gelten also nur für diese geometrisch eigenartig definierten ebenen Flächen, und lassen sich auch nicht auf den Raum übertragen.

Die zweite Arbeit des Herrn Schwarz***, welche überhaupt in gedrängtester Kürze eine ganze Theorie der Potentialfunktionen einschliesst, geht von dem Satze aus, dass jedes analytische Kurvenstück ohne singuläre Punkte, mit einer gewissen Umgebung zu beiden Seiten der Kurve, stets auf eine ebene Fläche so abgebildet werden kann, dass den Punkten des Kurvenstückes die Punkte einer Geraden entsprechen. Dies folgt unmittelbar aus der Darstellung der Koordinaten der Kurvenpunkte mittels Potenzreihen einer reellen Variabelen, sobald man dieser Variabelen auch komplexe Werte beilegt. Eine von beliebigen analytischen Kurvenstücken begrenzte Fläche lässt sich in Teile zerlegen, die in solcher Weise abbildbar sind, und es wird nun durch bestimmte Konvergenzbetrachtungen bewiesen, dass für die gesamte, aus solchen Teilen kombinierte Fläche die Bestimmung der Funktion

---

* Programm der eidgen. polyt. Schule. Zürich 1869/70.

** Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Annali di Mat. S. II. T. I.

*** Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Monatsberichte der Akademie z. Berlin, Oktober 1870.

aus ihren Randwerten möglich ist, weil für jeden einzelnen Teil dieser Satz gilt. Abgesehen davon, dass das Auftreten von singulären Punkten am Rande die Anwendbarkeit der Methode etwas erschwert, wird, so weittragend die Bedeutung des Beweises auch ist, durch die Forderung eines analytischen Charakters der Begrenzung eine nicht notwendige Bedingung von vornherein für die Untersuchung gestellt, die bei dem zuerst genannten Beweise nicht vorkam. Auch unterliegt die Methode der Einschränkung, dass sie sich nicht auf den Raum übertragen lässt, da es dort einen analogen, einfachen Ausgangspunkt nicht giebt.

Durch seine „Methode des Arithmetischen Mittels"* hat nun Herr Neumann gleichzeitig einen Weg angegeben, auf welchem das genannte Problem direkt, und zwar in ganz gleichartiger Weise für die Ebene wie für den Raum, erledigt wird, sobald die Tangenten der begrenzenden Kurve (resp. die Tangentialebenen der begrenzenden Fläche) nicht in das Innere des Gebietes eintreten, Gebiete also, deren Grenzen man wiederum kurz als „konvex nach aussen" bezeichnen kann. Mit Hilfe der von Herrn Neumann ebenfalls gefundenen und noch weiter ausgebildeten Kombinationsmethoden kann man nun auch solche Gebiete berücksichtigen, welche aus der Verschmelzung mehrerer Gebiete dieser Art entstehen, oder wenn man Gebiete von höherem Zusammenhange darstellen will, aus der Abtrennung eines solchen Gebietes im Innern eines anderen. Welchen Nutzen der Satz trotz dieser Beschränkung gewährt, hat Herr Neumann neuerdings gezeigt**, indem es ihm gelungen ist, sämtliche Existenztheoreme Riemanns in der Theorie der Abelschen Integrale zu beweisen, wobei man lediglich von der Lösung der Randwertaufgabe nur für einen Kreis auszugehen hat.

Doch die Potentialtheorie, und zumal die Theorie im Raume, kann bei diesen Ergebnissen nicht stehen bleiben: denn das Problem bleibt unerledigt, sobald man es mit einem ebenen Gebiet zu thun hat, bei welchem die Randkurve (ohne analytischen Charakter) teilweise oder überall konkav nach aussen liegt, oder mit einem Körper, dessen Begrenzungsflächen (auch mit analytischem Charakter) konkav nach aussen oder konkav-konvex sind. Denn derartige Gebilde lassen sich

---

* Zuerst mitgeteilt in den Berichten der K. Sächs. Gesellsch. der W. vom 21. April und 31. Oktober 1870. Ausführlicher dargestellt in den „Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential". Leipzig 1877.

** Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. 2. Aufl. Leipzig 1884.

im allgemeinen nicht mehr durch Kombinierungen aus den andersartigen Gebieten zusammensetzen.

Es besteht sonach, zumal in der Theorie des Newtonschen Potentiales, eine sehr fühlbare Lücke, von welcher Herr Neumann in der Vorrede zu dem genannten Buche sagt: „Sollte es in Zukunft gelingen, diese höchst unangenehme Einschränkung (bezüglich der nach aussen überall konvexen Flächen) durch eine geeignete Modifikation jener Methode, resp. durch die Substitution einer neuen Methode zu beseitigen, so würde dadurch nicht allein ein befriedigender Beweis des Dirichletschen Prinzips, sondern zugleich eine Position gewonnen sein, welche für die ganze Theorie des Potentials von grösster Wichtigkeit wäre."

Trotz mancher Versuche ist es mir nicht geglückt, die durch ihre Einfachheit ausgezeichnete Methode des arithmetischen Mittels für Gebiete mit beliebiger Begrenzung auszubilden*, und ich kehrte daher zu der einfacheren Aufgabe zurück, zunächst für beliebig begrenzte, ebene oder räumliche Gebiete die Existenz der Greenschen Funktion nachzuweisen, um dann hieraus mit Hilfe einer genaueren Diskussion der Greenschen Integralformel die Existenz der Funktion mit beliebigen Randwerten zu erkennen.

Eine für die Ebene wie für den Raum gleich anwendbare Methode, die von dem Polygon resp. vom Polyeder auszugehen hat, ergab sich in ähnlicher Weise wie bei der erst genannten Untersuchung des Herrn Schwarz. Es mussten zu diesem Zweck nur einige einfache Konvergenzsätze für die Potentialfunktionen gefunden, und insbesondere die Eigenschaften der Greenschen Funktion schärfer, als es bisher geschehen, festgestellt werden. Dann wird es in der That möglich, auch die Greensche Integralformel in einer gewissen Modifikation zu beweisen und für das Existenztheorem zu benutzen. Die gewöhnliche Form des Greenschen Integrales erhält man, sobald die Raumkurve von analytischem Charakter ist.

Diese Ergebnisse, welche ich in den Berichten der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften (Jahrgang 1886) mitgeteilt habe, veranlassten mich, die Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume in systematischer Weise, zugleich mit einer, wie mir scheint, möglichst vereinfachten Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung, zu behandeln. Indessen ergab sich bald, dass

---

* H. Neumann selbst hat soeben weitere Untersuchungen über seine Methode begonnen, die eine Ausdehnung derselben erhoffen lassen. Im XIII. Bande der Abh. der K. Sächs. Gesellsch. der W. 1887.

eine parallele Behandlung der ebenen und der räumlichen Probleme nicht zweckmässig ist, zumal da sich in der Ebene einige wesentliche Fragen mittels der konformen Abbildung erledigen lassen, was in gleicher Weise im Raum nicht möglich ist. So ist zunächst die vorliegende Arbeit für die Ebene allein entstanden, von der ich wünsche, dass sie sich als brauchbare Grundlage der allgemeinen Theorie erweisen möge. Wieviel ich dabei den vorgängigen, oben genannten Arbeiten verdanke, habe ich bereits angedeutet. Hier möchte ich noch besonders hervorheben, dass meine Arbeit, abgesehen von der Erweiterung des Existenztheorems und der Ergänzung einiger wesentlicher Lücken in der allgemeinen Theorie, auch bei der konformen Abbildung analytisch begrenzter Flächen, nichts anderes bezweckt, als unter einheitlichem Gesichtspunkt und in einheitlicher Form die früheren Arbeiten darzustellen, die der Form nach voneinander abweichen, während sie dem Inhalte nach völlig verwandt sind, und deren Verständnis teils durch ihre kurze Ausdrucksweise, teils dadurch, dass sie andersartige Untersuchungen mit hereinziehen, nicht leicht ist.

Meiner Darstellung habe ich durch die Beschränkung auf eindeutige Funktionen in der Ebene mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten einen bestimmten Abschluss zu geben gesucht. Denn mit Hilfe dieser Resultate lassen sich, sobald nur noch die einfache Übertragung von der Ebene auf Teile der Riemannschen Fläche vollzogen wird, die allgemeinen Sätze in der Theorie der Abelschen Funktionen beweisen. Desgleichen begründen sie die Untersuchung, welche Herr Schottky über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen ausgeführt hat, und ebenso den allgemeinen Satz des Herrn Poincaré über die Darstellung mehrdeutiger Funktionen mittels eindeutiger.

Im letzten Kapitel bin ich kurz auf die konforme Abbildung einfacher Flächen eingegangen, als erste und einfachste Anwendung, zu welcher die Riemannsche Theorie der komplexen Funktionen geführt hat. Ich musste dabei auf einige Lücken aufmerksam machen, die bei den bisherigen Beweisen der allgemeinen Aussagen vorhanden waren. Im übrigen habe ich die Methoden und Lehrsätze möglichst so einzurichten gesucht, dass sie auf die analogen Probleme im Raum übertragbar werden. Trotzdem wird eine vollständige Theorie der Potentialfunktionen im Raum noch an mehreren Stellen neue Untersuchungen erfordern. Zu denselben neue Anregung zu geben ist ein weiterer Zweck dieser Schrift.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Sätze über das logarithmische Potential und die Potentialfunktionen.

§ 1.

Ist zwischen einem Massenpunkt μ mit den Koordinaten a, b und einem anderen Massenpunkt m mit den Koordinaten x, y eine Abstossungskraft R vorhanden, welche der ersten Potenz der Entfernung ε proportional ist, so ist

$$R = \frac{\mu m}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

und die Komponenten X, Y der von μ auf m ausgeübten Beschleunigung besitzen die Werte

$$X = \frac{\mu m}{\varepsilon} \cdot \frac{x-a}{\varepsilon} = \frac{\mu m}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad Y = \frac{\mu m}{\varepsilon} \cdot \frac{y-b}{\varepsilon} = \frac{\mu m}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}.$$

Wirken auf den Punkt m mehrere Massen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ aus den Entfernungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ und zwar alle in derselben Ebene, und setzt man

$$\mu_1 l\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \mu_2 l\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right) + \mu_3 l\left(\frac{1}{\varepsilon_3}\right) + \ldots = \sum \mu_k l\left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right) = u,$$

so werden die Komponenten der gesamten beschleunigenden Kraft, welche auf den Punkt m wirkt, durch die Werte

$$X = -m\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = -m\frac{\partial u}{\partial y}$$

dargestellt. Die Grösse u heisst das logarithmische Potential der Massen μ. Der Wert desselben ist von der Wahl der Masseneinheit und von der Wahl der Längeneinheit abhängig. Wird die lineare Einheit um das n-fache geändert, so ändert sich der Wert des Potentiales um eine additive Konstante.

Sind r, ϑ die Polarkoordinaten des Punktes m, welcher beweglich gedacht wird, und r_k, ϑ_k die Polarkoordinaten eines Massenpunktes μ_k,

welcher fest ist, so ist $l(\varepsilon_k)$ gleich dem reellen Teil von $l(re^{i\vartheta} - r_k e^{i\vartheta_k})$. Ist also $r_k > r$, so wird

$$l\left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right) = l\left(\frac{1}{r_k}\right) + \frac{r}{r_k}\cos(\vartheta - \vartheta_k) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_k}\right)^2 \cos 2(\vartheta - \vartheta_k) + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{r_k}\right)^3 \cos 3(\vartheta - \vartheta_k) + \dots$$

Ist $r > r_k$, so wird

$$l\left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right) = l\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{r_k}{r}\cos(\vartheta - \vartheta_k) + \frac{1}{2}\left(\frac{r_k}{r}\right)^2 \cos 2(\vartheta - \vartheta_k) + \frac{1}{3}\left(\frac{r_k}{r}\right)^3 \cos 3(\vartheta - \vartheta_k) + \dots$$

Auch für $r = r_k$ gilt diese Entwickelung, wenn ϑ von ϑ_k verschieden ist.

Wenn also sämtliche Punkte μ_k ausserhalb eines um den Anfangspunkt der Koordinaten beschriebenen Kreises liegen, während m im Innern desselben sich befindet, so lässt sich das Potential nach steigenden Potenzen von r entwickeln:

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} a_n r^n, \text{ wobei } u_0 = \sum_k \mu_k l\left(\frac{1}{r_k}\right), \quad a_n = \sum_k \mu_k \frac{1}{r_k^n} \cos n(\vartheta - \vartheta_k).$$

Liegen dagegen sämtliche Punkte μ_k innerhalb eines Kreises, und m ausserhalb desselben, so wird das Potential nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{r}$ entwickelbar, und es ist

$$u = Ml\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} a_n \left(\frac{1}{r}\right)^n, \text{ wobei } M = \sum_k \mu_k, \quad a_n = \sum_k \mu_k r_k^n \cos n(\vartheta - \vartheta_k).$$

Die Grösse M stellt die Gesamtmasse des Systemes dar. Rückt der Punkt m ins Unendliche, so wird das Potential logarithmisch unendlich, und zwar wie $Ml\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r = \infty$. Nur wenn die Gesamtmasse null ist, bleibt das Potential endlich; es erhält im Unendlichen den Wert null.

Ist die Masse über eine ebene Fläche stetig ausgebreitet, so ist das Massenelement $dM = \delta\, da\, db$, wobei δ die Dichtigkeit der Belegung bezeichnet; also ist

$$M = \iint \delta\, da\, db, \quad u = \iint \delta l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) da\, db.$$

Liegen auch hier die Massen ausserhalb eines Kreises, der um den Koordinatenanfangspunkt beschrieben ist, und sind ϱ, η die Polarkoordinaten der Massenelemente, r, ϑ die Polarkoordinaten irgend eines im Innern des Kreises befindlichen Punktes, so ist in diesem der Wert des Potentiales

$$u = \iint \delta l\left(\frac{1}{\varrho}\right) \varrho\, d\varrho\, d\eta + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} r^n \iint \delta \left(\frac{1}{\varrho}\right)^n \cos n(\vartheta - \eta)\, \varrho\, d\varrho\, d\eta.$$

Die Doppelintegrale beziehen sich auf die mit Masse belegte Fläche. Liegen dagegen die Massenpunkte innerhalb des Kreises, so ist für jeden Punkt r, ϑ, der ausserhalb des Kreises sich befindet

$$u = l\left(\frac{1}{r}\right) \iint \delta\varrho \, d\varrho \, d\eta + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{r}\right)^n \iint \delta \varrho^n \cos n(\vartheta - \eta) \, \varrho \, d\varrho \, d\eta.$$

Auch hier wird das Potential, wenn der Punkt m ins Unendliche rückt, entweder logarithmisch unendlich oder null, je nachdem M von null verschieden oder gleich null ist.

Beispiel. Für eine Kreisfläche mit dem Radius a und gleichmässiger Belegung ist

$$M = \pi a^2 \delta, \quad u = \delta \iint l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) da \, db.$$

Ist r, ϑ ein Punkt ausserhalb des Kreises, so wird

$$u = \delta \int_0^{2\pi}\int_0^a \left[l\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\varrho}{r}\cos(\vartheta - \eta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cos 2(\vartheta - \eta) \ldots\right] \varrho \, d\varrho \, d\eta = Ml\left(\frac{1}{r}\right).$$

Ist r, ϑ ein Punkt innerhalb des Kreises, so wird

$$u = \delta \int_0^{2\pi}\int_0^r \left[l\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\varrho}{r}\cos(\vartheta - \eta) + \ldots\right] \varrho \, d\varrho \, d\eta + \delta \int_0^{2\pi}\int_r^a \left[l\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{r}{\varrho}\cos(\vartheta - \eta) \ldots\right] \varrho \, d\varrho \, d\eta$$

$$= 2\pi \delta l \left(\frac{1}{r}\right) \int_0^r \varrho \, d\varrho + 2\pi \delta \int_r^a l\left(\frac{1}{\varrho}\right) \varrho \, d\varrho = -\frac{\pi}{2} \delta r^2 + C,$$

wobei

$$C = \pi \delta a^2 \left[\frac{1}{2} + l\left(\frac{1}{a}\right)\right] = M\left[\frac{1}{2} + l\left(\frac{1}{a}\right)\right].$$

Ist die Masse über eine ebene Kurve stetig ausgebreitet, deren Bogenelement ds ist, so ist $dM = \delta \, ds$, also

$$M = \int \delta \, ds, \quad u = \int \delta l \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) ds.$$

Auch hier gelten analoge Reihenentwickelungen wie im vorigen Falle.

Beispiel: Für eine Kreisperipherie mit dem Radius a wird, wenn sie mit Masse gleichmässig belegt ist, $M = 2\pi a \delta$. Also ist für Punkte ausserhalb des Kreises:

$$u = \delta \int_0^{2\pi} [l\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{a}{r}\cos(\vartheta - \eta)\ldots]\, a d\eta = Ml\left(\frac{1}{r}\right)$$

und für Punkte innerhalb des Kreises

$$u = \delta \int_0^{2\pi} [l\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{r}{a}\cos(\vartheta - \eta)\ldots]\, a d\eta = Ml\left(\frac{1}{a}\right).$$

§ 2.

In jedem Punkt der Ebene, der ausserhalb der wirkenden Massen liegt, erhält das Potential einen bestimmten Wert, der sich stetig ändert. Dasselbe gilt auch von den Differentialquotienten, sowohl erster als höherer Ordnungen, da diese ebenfalls die Form von Summen oder von Integralen erhalten, in denen die einzelnen Terme, resp. die zu integrierende Funktion überall endlich und stetig bleiben.

Es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum -\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{x-a}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum -\mu\left[\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2(x-a)^2}{\varepsilon^4}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum -\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{y-b}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum -\mu\left[\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2(y-b)^2}{\varepsilon^4}\right],$$

und analoge Gleichungen bestehen, wenn das Potential mittels eines zweifachen oder einfachen Integrales definiert ist. Sonach ist das logarithmische Potential eine Funktion, welche in allen endlichen Gebieten der Ebene, die ausserhalb der wirkenden Massen liegen, nebst ihren Ableitungen endlich, eindeutig und stetig ist und der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt.

Eine jede Funktion $u(x, y)$, welche innerhalb eines gegebenen Gebietes in der Ebene nebst ihren ersten Ableitungen stetig ist, während die zweiten Ableitungen in Bezug auf die beiden Variabelen integrierbar sind und die partielle Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oder in Polarkoordinaten die partielle Differentialgleichung

$$2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 u}{(\partial l r)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0$$

befriedigen, ist durch eine Fouriersche Reihe und zwar in folgender Form darstellbar*. Beschreibt man um einen inneren Punkt des Gebietes einen Kreis mit dem Radius r, so ist für alle Punkte dieses Kreises

$$u = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta,$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u\, d\vartheta, \quad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u \cos k\vartheta\, d\vartheta, \quad B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\vartheta\, d\vartheta.$$

Die Koeffizienten A_0, A_k, B_k sind Funktionen von r. Um die Form derselben zu ermitteln, bilde man aus der partiellen Differentialgleichung die Gleichungen:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\, d\vartheta + \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\, d\vartheta + \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\, d\vartheta = 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos k\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \cos k\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \cos k\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin k\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{\pi r}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \sin k\vartheta\, d\vartheta = 0.$$

Dieselben erhalten, wenn man in dem letzten Integrale jedesmal die partielle Integration ausführt, die Form:

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_0}{dr} = 0,$$

$$\frac{d^2 A_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} A_k = 0,$$

$$\frac{d^2 B_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dB_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} B_k = 0.$$

Aus der Integration derselben erhält man die Werte:

$$A_0 = a_0 + a'_0\, l(r)$$
$$A_k = a_k r^k + a'_k r^{-k}$$
$$B_k = b_k r^k + b'_k r^{-k}.$$

* In Bezug auf die Lehrsätze über die Fouriersche Reihe, die übrigens hierbei immer nur unter den geläufigsten Bedingungen benutzt werden, darf ich auf den 2. Band meiner Bearbeitung des Lehrbuches der Differential- und Integralrechnung von Serret (Leipzig, 1885) verweisen.

Die Funktion u ist also darstellbar durch eine konvergente Reihe von der Form

$$3)\quad u = a_0 + a'_0\, l(r) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \cos k\vartheta (a_k r^k + a'_k r^{-k}) + \sin k\vartheta (b_k r^k + b'_k r^{-k}).$$

Diese Reihe konvergiert auf allen Kreisen, die innerhalb des Gebietes liegen, in welchem u in der angegebenen Weise definiert war. Da der Punkt $r = 0$ im Innern dieses Gebietes angenommen wurde, so müssen die Integrale A_k, B_k auch für $r = 0$ endlich bleiben, d. h. die Koeffizienten a'_0, a'_k, b'_k müssen null sein. Also ist

$$4)\qquad u = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)\, r^k.$$

Die konstanten Koeffizienten werden durch die Werte bestimmt, welche die Funktion u auf irgend einem Kreise besitzt, der innerhalb des Gebietes liegt, oder allenfalls bis an die Grenzen desselben heranreicht. Nennt man den Radius eines solchen Kreises r_1, die Werte, welche u auf demselben besitzt, U, so ist

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U d\vartheta, \qquad A_k = a_k r_1^{\,k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U \cos k\vartheta\, d\vartheta,$$

$$B_k = b_k r_1^{\,k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U \sin k\vartheta\, d\vartheta.$$

Diese Darstellung gilt sonach insonderheit für jedes Potential längs eines jeden Kreises, der keine wirkenden Massen einschliesst.

Auf einem Kreise aber, in dessen Innerem ein Gebiet vorhanden ist, in welchem die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ nicht mehr besteht, gilt die zuerst gefundene allgemeinere Entwickelung.

Da nun das Potential von Massen, die sämtlich im Endlichen gelegen sind, im Unendlichen selbst nur logarithmisch unendlich werden kann, so ist das Potential solch eine besondere Funktion u, dass für dasselbe auf einem beliebig grossen Kreise die Entwickelung besteht:

$$5)\qquad u = a'_0\, l\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a'_k \cos k\vartheta + b'_k \sin k\vartheta)\left(\frac{1}{r}\right)^k.$$

Aus der Reihe 4) folgt der Satz: Ist das Potential von Massen, die sämtlich ausserhalb einer zusammenhängenden Fläche liegen, in irgend einem Teile dieser Fläche konstant, so ist das Potential in

dieser zusammenhängenden Fläche überall konstant. Denn konstruiert man in dem Teil der ebenen Fläche, in welchem das Potential konstant ist, einen Kreis mit dem Radius ϱ, so ist auf diesem Kreise sowohl, als auch auf allen konzentrischen Kreisen $r < \varrho$ das Potential U darstellbar durch eine Reihe $U_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)\, r^k$. Diese Entwickelung gilt aber auch für die konzentrischen Kreise r, deren Radien grösser sind als ϱ, solange dieselben ganz im Innern der vorgegebenen zusammenhängenden Fläche sich befinden. Bezeichnet man mit R den grösstmöglichen Radius, so konvergiert die Fouriersche Reihe, solange $r < R$ ist, gleichmässig. Mithin folgt nach Multiplikation mit $\cos k\vartheta$ und $\sin k\vartheta$ und durch gliedweise Integration nach der Variabelen ϑ zwischen den Grenzen 0 und 2π, dass die Koeffizienten a_k und b_k sämtlich verschwinden müssen. Sonach hat U den konstanten Wert U_0 auf allen Kreisen des konstruierten Systems. Da nun jeder Punkt im Innern dieses Systems zum Mittelpunkt eines neuen Kreissystems gemacht werden kann, und da sich durch fortgesetzte Konstruktion solcher Kreissysteme jeder Punkt im Innern der zusammenhängenden Fläche durch einen Kreis einschliessen lässt, so erkennt man, dass das Potential in allen diesen Punkten denselben Wert hat.

Eine jede Funktion u, welche im Innern eines Gebietes nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten stetig ist und der partiellen Differentialgleichung 1) genügt, also durch Reihen von der Form 4) darstellbar ist, soll eine reguläre Potentialfunktion oder auch kürzer eine harmonische Funktion genannt werden. Alle ihre Ableitungen in Bezug auf r und ϑ können durch direkte Differentiation der Reihe erhalten werden, und die Reihe selbst bildet den reellen Bestandteil einer Funktion einer komplexen Variabelen. Denn es ist

$$\begin{aligned} u + iv &= a_0 + \sum_{k=0}^{k=\infty} r^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) + i \sum_{k=0}^{k=\infty} r^k (a_k \sin k\vartheta - b_k \cos k\vartheta) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k - ib_k)\, r^k (\cos k\vartheta + i \sin k\vartheta) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k - ib_k)\, (x + iy)^k. \end{aligned}$$

§ 3.

An diese Darstellung jedweder Potentialfunktion für die vollständige Umgebung eines Punktes, um welchen sie durchaus regulär ist, wollen wir noch zwei andere knüpfen, welche sich in eben so

einfacher Weise ergeben, nämlich für die Fläche eines Kreissektors und eines Rechteckes. Dieselben sind für die allgemeine Untersuchung deshalb von Bedeutung, weil sie die einfachsten Beispiele für das Verhalten von Potentialfunktionen in Eckpunkten des Randes bilden.

Die Winkelöffnung des Sektors sei α; α kann kleiner oder grösser sein als π; für $\alpha = \pi$ ist der Sektor ein Halbkreis. Der Radius des Sektors heisse r_1. Ist dann bekannt, dass eine Potentialfunktion in diesem Gebiete regulär ist und auch an den Grenzen desselben stetig bleibt, so lässt sie sich auf jedem der konzentrischen Kreisbogen, welchen wir um den Eckpunkt als Mittelpunkt mit einem Radius $r < r_1$ beschreiben, durch eine Reihe von der Form

$$1)\qquad u = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k \frac{\pi}{\alpha} \vartheta$$

darstellen. Nur auf den Schenkeln $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \alpha$ giebt diese Reihe im allgemeinen nicht den Wert der Funktion an. Die Koeffizienten

$$2)\qquad B_k = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha u \sin k \frac{\pi}{\alpha} \vartheta \, d\vartheta$$

sind wiederum durch das vorige Verfahren zu bestimmen. Es ist, wenn $k' = \frac{k\pi}{\alpha}$ gesetzt wird:

$$3)\quad \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin k' \vartheta \, d\vartheta + \frac{2}{\alpha r} \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial r} \sin k' \vartheta \, d\vartheta + \frac{2}{\alpha r^2} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \sin k' \vartheta \, d\vartheta = 0.$$

Bezeichnet man die Werte, welche die Funktion u auf dem Schenkel $\vartheta = 0$ besitzt, mit U_1 und auf dem Schenkel $\vartheta = \alpha$ mit U_2, so wird das letzte Integral durch teilweise Integration:

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \sin k' \vartheta \, d\vartheta = -\frac{2}{\alpha} k' [(-1)^k U_2 - U_1] - \frac{2}{\alpha} k'^2 \int_0^\alpha u \sin k' \vartheta \, d\vartheta.$$

Mithin bekommt die Differentialgleichung 3) zur Bestimmung von B_k die Form:

$$\frac{d^2 B_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_k}{dr} - \frac{k'^2}{r^2} B_k = \frac{2}{\alpha r^2} k' [(-1)^k U_2 - U_1]$$

und das allgemeine Integral derselben ist

$$4) \qquad B_k = r^{k'}\left[-\frac{1}{\alpha}\int\limits_r^{r_1}\left((-1)^k U_2 - U_1\right)\frac{d\varrho}{\varrho^{k'+1}} + c_k\right]$$

$$+ r^{-k'}\left[-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{r}\left((-1)^k U_2 - U_1\right)\varrho^{k'-1}\,d\varrho + c'_k\right],$$

wobei c_k und c'_k Konstante sind; dieselben können dadurch bestimmt werden, dass man den Wert von B_k bildet für zwei bestimmte Kreisbogen, z. B. r_1 und $r_2 < r_1$. Sind V_1 und V_2 die zugehörigen Werte von u, so ist

$$5)\begin{cases} \dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int\limits_0^{\alpha} V_1 \sin k'\vartheta\,d\vartheta = r_1^{k'}c_k + r_1^{-k'}\left[-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{r_1}\left((-1)^k U_2 - U_1\right)\varrho^{k'-1}\,d\varrho + c'_k\right], \\ \dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int\limits_0^{\alpha} V_2 \sin k'\vartheta\,d\vartheta = r_2^{k'}\left[-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{r_2}^{r_1}\left((-1)^k U_2 - U_1\right)\frac{d\varrho}{\varrho^{k'+1}} + c_k\right] \\ \qquad\qquad + r_2^{-k'}\left[-\frac{1}{\alpha}\displaystyle\int\limits_0^{r_2}\left((-1)^k U_2 - U_1\right)\varrho^{k'-1}\,d\varrho + c'_k\right]. \end{cases}$$

Die Herleitung der Gleichung 4) erfordert den Nachweis, dass die Differentiationen nach r in der Gleichung 3) an den Integralen selbst vollzogen werden kann, was eines besonderen Nachweises bedarf, weil die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial r}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ in den Punkten der begrenzenden Schenkel nicht mehr endlich zu sein brauchen. Man erhält indessen die Gleichung 4), indem man zuerst einen Sektor betrachtet, der innerhalb des gegebenen liegt, also von $\vartheta = \varepsilon$ bis $\vartheta = \alpha - \eta$ und alsdann zu den ursprünglichen Grenzen 0 und α übergeht.

Wenn nun das Potential endlich bleiben soll auch für $r = 0$, so muss, wie aus der zweiten der Gleichungen 5) für $r_2 = 0$ hervorgeht, $c'_k = 0$ sein und es wird die allgemeine Darstellung jeder regulären Potentialfunktion für den Sektor:

$$6)\begin{cases} u = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin k\frac{\pi}{\alpha}\vartheta \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \sin k\frac{\pi}{\alpha}\vartheta\left\{\frac{1}{\alpha}\int\limits_r^{r_1}\left((-1)^k U_2 - U_1\right)\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{r}\left((-1)^k U_2 - U_1\right)\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\frac{d\varrho}{\varrho}\right\}. \end{cases}$$

Die Funktion ist auf diese Weise in zwei Bestandteile zerlegt. Der erste hat auf den Schenkeln des Sektors den Wert null; der andere ist eine partikuläre Funktion, welche auf den Schenkeln die Werte U_1 und U_2 hat. Sind diese Werte null, so reduziert sich die ganze Funktion auf den ersten Bestandteil; also eine jede Potentialfunktion, welche innerhalb eines Sektors mit dem Winkel α regulär ist und auf den Schenkeln desselben den Wert null hat, ist in der Form

$$u = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin k \frac{\pi}{\alpha} \vartheta$$

darstellbar. Diese Darstellung lässt das Verhalten solch einer Funktion in der Ecke selbst beurteilen. Konvergiert r nach null, so wird das Anfangsglied der Reihe die Funktion u darstellen. Die Reihe kann mit dem Werte $k = 1$ oder mit einem grösseren Werte beginnen. Falls aber die Funktion, welche auf den Schenkeln den Wert null hat, innerhalb des Sektors ihr Zeichen nicht ändert, so muss das Anfangsglied $k = 1$ sein. Die Funktion hat dann in unmittelbarer Umgebung des Eckpunktes die Form

$$u = c_1 r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi}{\alpha} \vartheta$$

und die Ableitung nach der zu den Radien normalen Richtung ist

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = c_1 \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi - \alpha}{\alpha}} \cos \frac{\pi}{\alpha} \vartheta.$$

Man sieht, dass diese Ableitung für $r = 0$ null wird oder endlich bleibt, falls $\alpha \leqq \pi$ ist; dagegen unendlich wird, aber höchstens von der Ordnung $\frac{1}{2}$, falls $\alpha > \pi$ ist.

Ein besonderer Satz ergiebt sich für den Fall, dass $\frac{\pi}{\alpha}$ eine ganze Zahl ist; wir wollen aber nur den Halbkreis betrachten, wenn also $\alpha = \pi$ ist. Die Funktion, welche auf dem Durchmesser den Wert null hat, ist dann dargestellt durch die Reihe

$$u = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k r^k \sin k \vartheta$$

und hieraus ist zu ersehen, dass die Funktion stets eindeutig fortsetzbar ist auf die andere Hälfte des Kreises, indem man ϑ die Werte von π bis 2π erteilt. Die Funktion bekommt

in Punkten, die zum Durchmesser symmetrisch liegen, entgegengesetzt gleiche Werte.

Dieser Satz lässt sich sofort dahin verallgemeinern, dass jede Potentialfunktion u, welche längs einer Geraden Werte U besitzt, die auf der Geraden eine reguläre analytische Funktion bilden, über dieselbe hinaus fortsetzbar sein muss. Denn macht man irgend einen Punkt auf der Geraden zum Anfangspunkt einer Reihenentwickelung

$$U = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \ldots,$$

welche die Werte der Funktion U durch die Abstände $\pm r$ vom Anfangspunkt definiert, so stellt die Reihe

$$v = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k r^k \cos k\vartheta$$

eine Potentialfunktion dar, welche zu beiden Seiten der Geraden definiert ist und auf der Geraden die Werte U besitzt. Demnach ist $u - v$ eine Potentialfunktion, welche auf der Geraden den Wert null hat und nach dem eben bewiesenen Satze gleichfalls über dieselbe hinaus fortsetzbar sein muss. Folglich ist auch u auf beiden Seiten der Geraden vorhanden.

Wir kehren zurück zu dem allgemeinen Fall in der Gleichung 6) und nehmen an, dass U_1 und U_2 für $r = 0$ den nämlichen Wert haben, sodass die Funktion auf den Schenkeln des Sektors stetig bleibt. Man kann nach dem Verfahren, welches im § 7 ausführlicher angegeben ist, zeigen, dass sich die partikulären Integrale in der Form darstellen lassen:

$$v = \frac{1}{\alpha} \sin\frac{\pi}{\alpha}\vartheta \int_0^{r_1} U_1 \frac{(\varrho r)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\varrho^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 2 r^{\frac{\pi}{\alpha}} \varrho^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}\vartheta + r^{\frac{2\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \sin\frac{\pi}{\alpha}\vartheta \int_0^{r_1} U_2 \frac{(\varrho r)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\varrho^{\frac{2\pi}{\alpha}} + 2 r^{\frac{\pi}{\alpha}} \varrho^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{\alpha}\vartheta + r^{\frac{2\pi}{\alpha}}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Das erste Integral stellt eine Potentialfunktion dar, welche für $\vartheta = 0$ den Wert U_1, für $\vartheta = \alpha$ den Wert null hat; das andere hat für $\vartheta = 0$ den Wert null, für $\vartheta = \alpha$ den Wert U_2. Bezeichnet man mittlere Werte von U_1 und U_2 (die von r und ϑ abhängig sind) durch V_1 und V_2, und setzt man zur Abkürzung $\frac{\pi}{\alpha} = m$, so ergeben diese Integrale für jeden von 0 und α verschiedenen Wert von ϑ

$$v = \frac{1}{\pi} V_1 \left[\operatorname{arctg} \frac{r_1{}^m - r^m \cos m \vartheta}{r^m \sin m \vartheta} - m \vartheta + \frac{\pi}{2} \right]$$
$$+ \frac{1}{\pi} V_2 \left[\operatorname{arctg} \frac{r_1{}^m + r^m \cos m \vartheta}{r^m \sin m \vartheta} + m \vartheta - \frac{\pi}{2} \right].$$

Um aber das Verhalten der Funktion und ihrer ersten Ableitungen in der Umgebung des Eckpunktes zu beurteilen, betrachten wir direkt die Reihe

$$w = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sin k m \vartheta \left\{ \int_r^{r_1} U_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{km} \frac{d\varrho}{\varrho} + \int_0^r U_1 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{km} \frac{d\varrho}{\varrho} \right\}$$

und die analoge mit U_2 gebildete, welche durch gleichzeitige Vertauschung von ϑ mit $\alpha - \vartheta$ erhalten wird. Wir nehmen an, dass U_1 regulär, also von der Form ist:

$$U_1 = a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \dots$$

im Intervall von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r_1$. Alsdann wird der Koeffizient von $\sin k m \vartheta$ gleich

$$\frac{1}{\alpha} r^{km} \int_r^{r_1} \left(\frac{a_0}{\varrho^{km+1}} + \frac{a_1}{\varrho^{km}} + \frac{a_2}{\varrho^{km-1}} + \dots \right) d\varrho + \frac{1}{\alpha r^{km}} \int_0^r (a_0 \varrho^{km-1} + a_1 \varrho^{km} + \dots) \, d\varrho,$$

und dies ist im allgemeinen (denn es werden, wenn $m = \frac{\pi}{\alpha}$ rational ist, auch logarithmische Glieder auftreten) gleich:

$$- \left(\frac{r}{r_1}\right)^{km} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{a_0}{km} + \frac{a_1}{km-1} r_1 + \frac{a_2}{km-2} r_1{}^2 + \dots \right\}$$
$$+ \frac{2}{\alpha} \left\{ \frac{a_0}{km} + \frac{km}{k^2 m^2 - 1} a_1 r + \frac{km}{k^2 m^2 - 4} a_2 r^2 + \dots \right\}.$$

Da nun

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \sin k \frac{\pi}{\alpha} \vartheta = \left(1 - \frac{\vartheta}{\alpha}\right)$$

ist, so wird

$$w = a_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{km} \sin k m \vartheta \left(\frac{a_0}{km} + \frac{a_1}{km-1} r_1 + \frac{a_2}{km-2} r_1{}^2 + \dots \right)$$
$$+ \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{k=\infty} k m \sin k m \vartheta \left(\frac{1}{k^2 m^2 - 1} a_1 r + \frac{1}{k^2 m^2 - 4} a_2 r^2 + \dots \right).$$

Die erste dieser beiden Summenformeln ist eine Potentialfunktion, welche auf den beiden Schenkeln des Winkels den Wert null hat; wir lassen dieselbe daher fort und betrachten nur noch die Potential-

funktion w_1, welche aus den übrigen Gliedern besteht; dieselbe lässt sich in der Form darstellen:

$$w_1 = a_0\left(1-\frac{\vartheta}{\alpha}\right) + a_1 r\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} + a_2 r^2\frac{\sin 2(\alpha-\vartheta)}{\sin 2\alpha} + \ldots + a_n r^n\frac{\sin n(\alpha-\vartheta)}{\sin n\alpha}\ldots;$$

denn die obige Reihe ist die Darstellung dieser in Form der Fourierschen Reihe innerhalb des Intervalles von 0 bis α.

Also ist

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{\alpha r}a_0 - a_1\frac{\cos(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} - 2a_2 r\frac{\cos 2(\alpha-\vartheta)}{\sin 2\alpha} - \ldots$$

Für $r=0$ wird dieser Wert von der ersten Ordnung unendlich; da aber eine analoge Entwickelung derjenigen Funktion, welche sich auf U_2 bezieht, mit dem Gliede $\frac{1}{\alpha r}a_0$ beginnt, weil $U_2(0)=U_1(0)$ sein sollte, so fällt dieser erste Term bei der Bildung von $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\vartheta}$ fort. Ferner ist

$$\frac{\partial w_1}{\partial r} = a_1\frac{\sin(\alpha-\vartheta)}{\sin\alpha} + 2a_2 r\frac{\sin 2(\alpha-\vartheta)}{\sin 2\alpha} + \ldots$$

Die partikuläre Potentialfunktion, welche wir hier konstruiert haben, mit den Randwerten U_1 und U_2, hat also, wenn $U_1(0)=U_2(0)$ ist, die Eigenschaft, dass ihre Ableitungen auch für $r=0$ endlich bleiben. Da aber zu derselben noch eine Funktion hinzutreten kann, welche auf den Schenkeln den Wert null hat, so erhält man den Satz:

Sind die Funktionen U_1 und U_2 regulär, und ist $U_1(0)=U_2(0)$, so bleiben die Ableitungen $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}$ und $\frac{\partial u}{\partial r}$ für $r=0$ immer endlich, wenn $\alpha<\pi$ ist; sie können unendlich werden, aber nur von der Ordnung $1-m=\frac{\alpha-\pi}{\alpha}$, sobald $\alpha>\pi$ ist. Ist aber die Randfunktion U an der Stelle $r=0$ unstetig, so wird die Ableitung $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\vartheta}$ von der ersten Ordnung unendlich.

Die obige Gleichung für w_1 gilt nicht, wenn α ein rationaler Teil von 2π ist; aber der eben bewiesene Satz bleibt bestehen; er modifiziert sich nur für den Fall $\alpha=\pi$; alsdann bekommt w_1 die Form:

$$w_1 = a_0\left(1-\frac{\vartheta}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k r^k\left[\left(1-\frac{\vartheta}{\pi}\right)\cos k\vartheta - \frac{\sin k\vartheta}{\pi}\,l(r)\right]$$

und es wird

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial \vartheta} = -\frac{a_0}{\pi r} + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k r^{k-1}\left(-\frac{1}{\pi}\cos k\vartheta - k\left(1-\frac{\vartheta}{\pi}\right)\sin k\vartheta - \frac{k}{\pi}\cos k\vartheta\, l(r)\right),$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial r} = \left(1-\frac{\vartheta}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{k=\infty} k a_k r^{k-1}\cos k\vartheta - \frac{1}{\pi r}\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k r^k \sin k\vartheta - \frac{l(r)}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} k a_k r^{k-1}\sin k\vartheta.$$

Es können also die Ableitungen im Punkte $r = 0$ logarithmisch unendlich werden, wenn a_1 nicht null ist.

§ 4.

Ist in einem Rechteck von $x = 0$ bis $x = a$ und $y = 0$ bis $y = b$ eine Potentialfunktion gegeben, die auf dem Rande $x = 0$ und $x = a$ die Werte V_1 und V_2, auf dem Rande $y = 0$ und $y = b$ die Werte U_1 und U_2 hat, so ist dieselbe darstellbar in der Form

$$u = \sum A_k \sin k\frac{\pi}{a}x \quad \text{und es ist} \quad A_k = \frac{2}{a}\int_0^a u \sin k\frac{\pi}{a}x\,dx.$$

Aus der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ folgt wie früher

$$\frac{d^2 A_k}{dy^2} = -\frac{2}{a}\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin k\frac{\pi}{a}x\,dx = \frac{2}{a}\frac{k\pi}{a}\left[V_2(-1)^k - V_1\right] + \frac{k^2\pi^2}{a^2}A_k.$$

Wir wollen nur den Fall betrachten, dass V_1 und V_2 gleich null sind; denn man kann, wie später gezeigt wird, die allgemeine Potentialfunktion zusammensetzen aus solchen speziellen, welche auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Rechteckes die Werte null haben. Aus der Differentialgleichung folgt dann

$$A_k = c_k e^{k\frac{\pi}{a}y} + c'_k e^{-k\frac{\pi}{a}y}$$

und die Konstanten c_k und c'_k sind durch die Gleichungen bestimmt

$$\frac{2}{a}\int_0^a U_1 \sin k\frac{\pi}{a}x\,dx = c_k + c'_k, \quad \frac{2}{a}\int_0^a U_2 \sin k\frac{\pi}{a}x\,dx = c_k e^{k\frac{\pi}{a}b} + c'_k e^{-k\frac{\pi}{a}b}.$$

Bezeichnet man die Integrale auf den linken Seiten zur Abkürzung mit α_k und β_k, und $k\frac{\pi}{a}$ mit k', so wird

$$A_k = \alpha_k \frac{e^{k'(b-y)} - e^{-k'(b-y)}}{e^{k'b} - e^{-k'b}} + \beta_k \frac{e^{k'y} - e^{-k'y}}{e^{k'b} - e^{-k'b}}.$$

Wird also $e^{-\frac{b}{a}\pi}$ mit q, und $\frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2}$ mit $\mathfrak{Sin}\,(ny)$ bezeichnet, so ist

$$u = \frac{4}{a}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{q^k}{1-q^{2k}}\,\mathfrak{Sin}\,(k'y)\sin k'x\int_0^a U_2 \sin k'x\,dx$$
$$+\frac{4}{a}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{q^k}{1-q^{2k}}\,\mathfrak{Sin}\,k'(b-y)\sin k'x\int_0^a U_1 \sin k'x\,dx$$

die Darstellung einer Potentialfunktion innerhalb eines Rechteckes, welche auf den Seiten $y=0$ und $y=b$ die Werte U_1 und U_2, auf den Seiten $x=a$ und $x=b$ die Werte null hat.

§ 5.

Es soll nun das Potential untersucht werden, bei welchem die Massen mit endlicher Dichte eine bestimmte ebene Fläche, die ganz im Endlichen gelegen ist, ausfüllen. Ist τ die ganze mit Masse belegte Fläche, $d\tau$ ein Element derselben, so ist

$$u = \int \delta\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\tau, \quad r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

wenn wir jetzt mit r die Entfernung des Punktes x, y von dem Element $d\tau$ bezeichnen, dessen Koordinaten a, b sind. Auch wenn der Punkt x, y innerhalb der Fläche τ liegt, behält dieses Integral einen bestimmten, endlichen Wert, wiewohl $l\left(\frac{1}{r}\right)$ auch unendlich wird; denn führt man statt der Koordinaten a, b Polarkoordinaten ein, mittels der Gleichungen:

$$a = x + r\cos\varphi, \quad b = y + r\sin\varphi,$$

so wird

$$u = \int\int \delta\, l\left(\frac{1}{r}\right) r\,dr\,d\varphi = \int d\varphi \int \delta\, l\left(\frac{1}{r}\right) r\,dr$$

und es ist die Integration statthaft, weil $\lim r\,l\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ wird für $r = 0$. Aus dieser Eigenschaft des Integrales folgt auch, dass das Potential eine stetige Funktion von x, y für alle Punkte der Ebene ist.

Ferner bestehen die Gleichungen

$$X = \int \delta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,d\tau = -\int \delta\,\frac{\partial}{\partial x}\,l\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = -\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$Y = \int \delta\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,d\tau = -\int \delta\,\frac{\partial}{\partial y}\,l\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = -\frac{\partial u}{\partial y}\cdot$$

Diese Integrale besitzen nämlich bestimmte endliche und stetige Werte, wie durch Einführung der Polarkoordinaten erkannt wird; es ist

$$X = \int\int \delta \frac{\partial r}{\partial x} \, dr \, d\varphi = -\int\int \delta \cos\varphi \, dr \, d\varphi,$$

$$Y = \int\int \delta \frac{\partial r}{\partial y} \, dr \, d\varphi = -\int\int \delta \sin\varphi \, dr \, d\varphi.$$

Um nun zu zeigen, dass diese Werte den partiellen Ableitungen $-\frac{\partial u}{\partial x}$ und $-\frac{\partial u}{\partial y}$ gleich sind, auch wenn x, y innerhalb τ liegen, integriere man das Integral X nach der Variabelen x innerhalb zweier Grenzen x_0, y und x_1, y die im Gebiete τ gelegen sind. Zu dem Zwecke schliesse man die Strecke von x_0, y bis x_1, y durch einen beliebig schmalen Parallelstreifen τ_1 von der Breite 2β und der Länge α ein, und zerlege das Integral X in zwei Teile X_1 und X_2, von denen sich der eine auf die Fläche dieses Streifens, der andere auf den übrigen Teil τ_2 der Fläche τ bezieht. Da nun $\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}$ eine durchaus endliche und stetige Funktion von x für das Intervall von x_0 bis x_1 bei allen Elementen von τ_2 ist, so wird

$$\int_{x_0}^{x_1} X_2 \, dx = \int_{x_0}^{x_1} dx \int \delta \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \, d\tau_2 = -\int \delta \left[l\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{x_0}^{x_1} d\tau_2.$$

Ferner ist

$$X_1 = \int \delta \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \, d\tau_1$$

kleiner als $\Delta \int \frac{1}{r} \, d\tau_1$, wenn man mit Δ den absolut grössten Wert von δ im Gebiete τ_1 bezeichnet. Setzt man das Flächenelement $d\tau_1 = da\,db$, ferner $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, so ist

$$\int \frac{1}{r} \, d\tau_1 = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} da \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{db}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

wobei $\alpha_1 + \alpha_2$ gleich der Länge α der einen Seite des Rechteckes ist, und α_1 und α_2 die Abstände eines Punktes x, y von den zu den Ordinaten b parallelen Seiten des Rechteckes bedeuten. Es ist

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} da \int_{-\beta}^{\beta} \frac{db}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} da \, l \frac{\sqrt{a^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{a^2+\beta^2}-\beta} = \left[a l \frac{\sqrt{a^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{a^2+\beta^2}-\beta}\right]_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} + 2\beta \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{da}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$$

$$= \alpha_2 \, l \frac{\sqrt{\alpha_2{}^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{\alpha_2{}^2+\beta^2}-\beta} + \alpha_1 \, l \frac{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta^2}-\beta} + 2\beta \, l \frac{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta^2}+\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2{}^2+\beta^2}-\alpha_2}.$$

Da die Grösse β beliebig klein fixiert werden kann, während α_1 und α_2 für alle Werte von x innerhalb des Intervalles x_0 bis x_1 endliche Werte behalten, so ist der Betrag von X_1 bei allen diesen Werten von x kleiner als eine beliebig klein fixierte Grösse. Mithin ist auch $\int_{x_0}^{x_1} X_1\,dx$ beliebig klein, und folglich wird

$$\int_{x_0}^{x_1} X\,dx = -\lim_{\tau_2=\tau}\int\delta\left[l\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{x_0}^{x_1} d\tau_2 = -\int\delta\left[l\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{x_0}^{x_1} d\tau = -(u_{x_1}-u_{x_0}).$$

Die analoge Gleichung besteht für Y.

§ 6.

Die zweiten Differentialquotienten von u lassen sich, falls der Punkt x, y innerhalb der wirkenden Massen liegt, nicht durch ein Integral darstellen, welches durch zweimalige Differentiation von

$$u = \int\delta\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\tau$$

unter dem Integralzeichen gebildet wird; denn das auf diese Weise gebildete Integral würde unzulässig sein.

Indem wir annehmen, dass die Dichte δ in der Umgebung einer Stelle x, y, welche wir betrachten wollen, eine stetige Funktion mit endlichen und integrierbaren Differentialquotienten ist, umgeben wir diese Stelle mit einer Kreisfläche τ_1 von beliebig kleinem Radius. Das Potential zerfällt in zwei Teile: $u = u_1 + u_2$, von denen der erste von den innerhalb τ_1 befindlichen Massen, der andere von den übrigen herrührt, deren Flächengebiet τ_2 heissen möge. Es ist nun

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \int\delta\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_2.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\int\!\!\int\delta\,\frac{x-a}{r^2}\,d\tau_1 = -\int\!\!\int\delta\,\frac{\partial}{\partial a}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_1 = -\int db\int\delta\,\frac{\partial}{\partial a}\, l\left(\frac{1}{r}\right) da.$$

Wendet man auf das innere Integral die teilweise Integration an, indem man die zu einem Werte b gehörigen extremen Werte von a mit a_1 (Eintrittsstelle), a_2 (Austrittsstelle der Geraden $y=b$) bezeichnet, so erhält man

$$\int\delta\,\frac{\partial}{\partial a}\, l\left(\frac{1}{r}\right) da = \left[\delta\, l\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{a_1}^{a_2} - \int\frac{\partial\delta}{\partial a}\, l\left(\frac{1}{r}\right) da.$$

Bezeichnet α den Winkel, welchen die nach aussen errichtete Normale des Elementes ds der Kreisperipherie mit der Richtung der positiven a einschliesst, so ist längs der Peripherie an den Austrittsstellen a_2

$$db = \cos\alpha\, ds$$

und an den Eintrittsstellen a_1

$$db = -\cos\alpha\, ds.$$

Mithin wird

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\int \delta\, l\left(\frac{1}{r}\right) \cos\alpha\, ds + \iint \frac{\partial\, \delta}{\partial a}\, l\left(\frac{1}{r}\right) da\, db,$$

wobei das erste Integral für alle Punkte der Kreisperipherie zu bilden ist; folglich ist

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\int \delta \cdot \frac{\partial}{\partial x}\, l\left(\frac{1}{r}\right) \cos\alpha\, ds + \iint \frac{\partial\, \delta}{\partial a}\left[\frac{\partial}{\partial x}\, l\left(\frac{1}{r}\right)\right] da\, db.$$

Es ist nun für den Mittelpunkt x, y des Kreises, wenn der Radius desselben mit ϱ bezeichnet wird:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\, l\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x-a}{r} = -\frac{\cos\alpha}{\varrho},$$

also

$$-\int \delta\, \frac{\partial}{\partial x}\, l\left(\frac{1}{r}\right) \cos\alpha\, ds = -\int \delta \cos\alpha^2\, d\alpha = -\pi\, [\delta],$$

wobei $[\delta]$ einen mittleren Wert von δ auf der Peripherie des Kreises τ_1 bezeichnet. Sonach ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi\, [\delta] + \iint \frac{\partial\, \delta}{\partial a}\left[\frac{\partial}{\partial x}\, l\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau_1 + \iint \delta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, l\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau_2.$$

Das erste Integral der rechten Seite wird beliebig klein, wenn der Radius ϱ des Kreises τ_1 beliebig verkleinert wird. Bezeichnet man also die Dichtigkeit im Punkte x, y mit δ_0, so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi\, \delta_0 + \lim_{\tau_2 = \tau} \iint \delta \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, l\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\pi\, \delta_0 + \lim_{\tau_2 = \tau} \iint \delta \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\, l\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau_2.$$

(Die Integrale der rechten Seite lassen sich nicht schlechtweg als Doppelintegrale schreiben, weil der Grenzprozess in einer ganz bestimmten Weise auszuführen ist.) Folglich besteht für jeden innerhalb der wirkenden Massen gelegenen Punkt, in dessen Umgebung die

Dichtigkeit stetig und ihr Differentialquotient endlich und integrierbar ist, die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\pi\delta_0.*$$

§ 7.

Eine jede Funktion $u(x, y)$, welche innerhalb eines gegebenen Gebietes in der Ebene nebst ihren ersten Ableitungen stetig ist, während die zweiten Ableitungen integrierbar sind, und die partielle Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

oder in Polarkoordinaten die partielle Differentialgleichung

$$2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = f(r, \vartheta)$$

befriedigen, wobei f eine beliebig gegebene, aber stetige Funktion der beiden Variabelen bedeuten soll, lässt sich darstellen als Summe einer partikulären Funktion u_1, welche dieser Gleichung Genüge leistet, und einer allgemeinen Potentialfunktion u_2, welche die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt. Eine partikuläre Funktion ist nun durch das Potential

$$-\frac{1}{2\pi}\int f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\tau$$

gegeben, wenn mit ε die Entfernung eines variabelen Punktes r, ϑ innerhalb des Gebietes von den Elementen mit den Koordinaten ϱ, η desselben Gebietes bezeichnet wird. Denn dass diese Funktion die obige Differentialgleichung befriedigt, ist im vorigen Artikel bewiesen worden, allerdings unter der Voraussetzung, dass die Funktion f endliche und integrierbare Ableitungen besitzt. Das allgemeine Integral der

---

* Nach einem Verfahren, welches von Herrn Hölder (Tübingen, Dissertation 1882) für das Potential im Raume angegeben ist, lässt sich dieser Satz auch beweisen unter der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit δ in der Umgebung der Stelle eine stetige Funktion ist, welche der Bedingung genügt

$$abs\,[\delta - \delta_0] < A r^{\mu}.$$

A und μ bedeuten hierbei positive Konstante, während r die Entfernung des Elementes mit der Dichtigkeit δ von dem betrachteten Element mit der Dichtigkeit δ_0 angiebt. Die blosse Kontinuität der Dichtigkeit scheint zum Beweise des Satzes nicht auszureichen.

Differentialgleichung ist demnach unter dieser Voraussetzung auf jedem innerhalb des Gebietes gelegenen Kreise in der Form darstellbar:

$$3)\quad a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) r^k - \frac{1}{2\pi} \int f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\tau.$$

Solch eine Funktion werde ich eine zu f gehörige Potentialfunktion nennen; ist $f = 0$, so wird die Funktion eine Potentialfunktion der früher betrachteten Art. Das Potential

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi} \int f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\tau$$

ist aber ebenfalls durch eine Fouriersche Reihe darstellbar; denn wie früher bewiesen wurde, ist u_1 eine nebst ihren ersten Differentialquotienten stetige Funktion auf jedem Kreise, den wir innerhalb des gegebenen Gebietes konstruieren. Setzt man

$$u_1 = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta),$$

so sind die Koeffizienten A_k und B_k aus den Gleichungen zu berechnen:

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\vartheta\, d\vartheta \int f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\tau,$$

$$B_k = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin k\vartheta\, d\vartheta \int f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\tau.$$

Bezeichnet man das Flächenelement $d\tau$ mit $\varrho\, d\varrho\, d\eta$ und erstreckt man das Doppelintegral über einen Kreis vom Radius r_1, in dessen Innern der Punkt r, ϑ liegt, so wird

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\vartheta\, d\vartheta \int_0^{r_1} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \varrho\, d\varrho\, d\eta.$$

Das Integral von 0 bis r_1 zerlege man in zwei Teile von 0 bis $r - \varepsilon$, und von $r + \varepsilon$ bis r_1, so ist

$$A_k = \lim_{\varepsilon=0} -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{r-\varepsilon} \varrho\, d\varrho \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\, d\eta \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\vartheta\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\vartheta$$

$$+ \lim_{\varepsilon=0} -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{r+\varepsilon}^{r} \varrho\, d\varrho \int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\, d\eta \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\vartheta\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\vartheta.$$

Da nun für $\varrho < r$

$$l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = l\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\varrho}{r}\cos(\vartheta - \eta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cos 2(\vartheta - \eta) \ldots,$$

so ist im ersten Teil:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\vartheta \, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\vartheta = \frac{1}{k}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \pi \cos k\eta,$$

während im zweiten Teil $\varrho > r$, also

$$l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \left(\frac{r}{\varrho}\right)\cos(\vartheta - \eta) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \cos 2(\vartheta - \eta) \ldots$$

und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\vartheta \, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\vartheta = \frac{1}{k}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^k \pi \cos k\eta$$

wird. Führt man zur Abkürzung der Formeln die Bezeichnungen ein:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\, d\eta, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta) \cos k\eta \, d\eta,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta) \sin k\eta \, d\eta,$$

so wird:

$$A_k = -\frac{1}{2k}\left[\int_0^r \alpha_k \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \varrho\, d\varrho + \int_r^{r_1} \alpha_k \left(\frac{r}{\varrho}\right)^k \varrho\, d\varrho\right],$$

$$B_k = -\frac{1}{2k}\left[\int_0^r \beta_k \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \varrho\, d\varrho + \int_r^{r_1} \beta_k \left(\frac{r}{\varrho}\right)^k \varrho\, d\varrho\right],$$

$$A_0 = -l\left(\frac{1}{r}\right)\int_0^r \alpha_0 \varrho\, d\varrho - \int_r^{r_1} \alpha_0 \, l\left(\frac{1}{\varrho}\right) \varrho\, d\varrho.$$

Durch diese Untersuchung ist die Entwicklung bewiesen:

$$\int_0^{r_1}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \varrho\, d\varrho\, d\eta = l\left(\frac{1}{r}\right)\int_0^{r}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\, \varrho\, d\varrho\, d\eta$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\int_0^{r}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \cos k(\vartheta - \eta)\, \varrho\, d\varrho\, d\eta + \int_r^{r_1}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varrho}\right) \varrho\, d\varrho\, d\eta$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\int_r^{r_1}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho, \eta)\left(\frac{r}{\varrho}\right)^k \cos k(\vartheta - \eta)\, \varrho\, d\varrho\, d\eta.$$

§ 8.

Aus dieser Reihe aber lässt sich weiter schliessen: Ist die Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung einer Stelle eine eindeutige und reguläre Funktion, so ist auch das Potential

$$-\frac{1}{2\pi}\int f(\varrho, \eta)\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\tau$$

in der Umgebung dieser Stelle eindeutig und regulär.

Eine Funktion zweier Variabelen x, y heisst in der Umgebung einer Stelle eindeutig und regulär, wenn sie sich nach ganzen wachsenden Potenzen der Variabelen x, y entwickeln lässt, wobei die betrachtete Stelle zum Anfangspunkt der Koordinaten gewählt ist; d. h. die Funktion ist von der Form

$$a_0 + (a_{10}\, x + a_{01}\, y) + (a_{20}\, x^2 + a_{11}\, xy + a_{02}\, y^2) + \dots$$

oder in Polarkoordinaten:

$$a_0 + (a_{10} \cos\vartheta + a_{01} \sin\vartheta) r + (a_{20} \cos\vartheta^2 + a_{11} \cos\vartheta \sin\vartheta + a_{02} \sin\vartheta^2) r^2 \dots$$

Drückt man die Potenzen von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ durch die Cosinus und Sinus der Vielfachen von ϑ aus, nach der Formel

$$\cos\vartheta^m \sin\vartheta^n = \left(\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}\right)^m \left(\frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}\right)^n,$$

so gehen, wenn die Dimension $m + n$ mit μ bezeichnet wird, auch die Vielfachen von ϑ bis zur Zahl $\mu\vartheta$, und sind gerade oder ungerade, je nachdem μ gerade oder ungerade ist. Eine eindeutige reguläre Funktion zweier Variabelen ist also in Polarkoordinaten von der Form

$$A_0 + A_1\, r + A_2\, r^2 + \dots,$$

wobei A_μ die Cosinus und Sinus der Vielfachen: $\mu\vartheta, (\mu - 2)\vartheta, (\mu - 4)\vartheta, \dots$ enthält. Umgekehrt ist auch jede auf diese Weise definierte Funktion eine eindeutig reguläre. Man kann diese Reihe aber auch für jeden Wert von r, der innerhalb des Konvergenzgebietes liegt, nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von ϑ ordnen, weil die Funktion durch eine Fouriersche Reihe bei jedem Wert von ϑ darstellbar sein muss. Man gewinnt diese Reihe, indem man die obige mit $\cos n\vartheta$ oder $\sin n\vartheta$ multipliziert, und alsdann gliedweise zwischen den Grenzen $\vartheta = -\pi$ und $\vartheta = +\pi$ integriert.

Ordnet man also eine reguläre analytische Funktion nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von ϑ, so werden die Koeffizienten Potenzreihen in r, und zwar enthalten die Koeffizienten von $\cos n\vartheta$ und $\sin n\vartheta$ die Potenzen r^n, r^{n+2}, $r^{n+4}, \dots$

Und umgekehrt: Jede konvergente Reihe dieser Art ist eine eindeutige und reguläre Funktion, weil sie sich für jeden Wert von r, der innerhalb des Konvergenzgebietes liegt, nach Potenzen von r umordnen lässt.

Ist nun $f(\varrho, \eta)$ eine eindeutige, reguläre Funktion in der Umgebung der Nullstelle, und setzt man

$$f(\varrho, \eta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \cos k\eta + \beta_k \sin k\eta,$$

so sind α_k und β_k durch Potenzreihen in ϱ darstellbar, und zwar enthält α_k die Terme $\varrho^k, \varrho^{k+2}, \varrho^{k+4}, \ldots$, desgleichen β_k. Setzt man also zunächst

$$\alpha_0 = A_0 + A_2 \varrho^2 + A_4 \varrho^4 \ldots$$

so ist

$$l\left(\frac{1}{r}\right) \int_0^r \alpha_0 \varrho \, d\varrho = l\left(\frac{1}{r}\right) \left[A_0 \frac{r^2}{2} + A_2 \frac{r^4}{4} + A_4 \frac{r^6}{6} + \ldots\right],$$

$$\int_r^{r_1} \alpha_0 \varrho \, l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\varrho = -\int_r^{r_1} (A_0 \varrho + A_2 \varrho^3 + A_4 \varrho^5 \ldots)\, l(\varrho)\, d\varrho$$

$$= -\left[A_0 \frac{\varrho^2}{2} l(\varrho) + A_2 \frac{\varrho^4}{4} l(\varrho) + A_4 \frac{\varrho^6}{6} l(\varrho) + \ldots\right]_r^{r_1}$$

$$+ \left[A_0 \frac{\varrho^2}{2.2} + A_2 \frac{\varrho^4}{4.4} + A_4 \frac{\varrho^6}{6.6} + \ldots\right]_r^{r_1}.$$

Bei Addition dieser Reihen verschwindet der mit $l(r)$ multiplizierte Term und es wird, abgesehen von einer Konstanten,

$$A_0 \frac{r^2}{2.2} + A_2 \frac{r^4}{4.4} + A_4 \frac{r^6}{6.6} + \ldots$$

das Anfangsglied des Potentiales.

Ferner wird α_k eine Reihe, welche mit dem Gliede k^{ter} Dimension in ϱ beginnt, also wird das Anfangsglied der Entwicklung von

$$-\frac{1}{2k} \int_0^r \alpha_k \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \varrho \, d\varrho \text{ gleich } -\frac{r^{-k}}{2k} \int_0^r \varrho^{2k+1} d\varrho = -\frac{r^{k+2}}{2k . 2k + 2}$$

und von

$$-\frac{1}{2k} \int_r^{r_1} \alpha_k \left(\frac{r}{\varrho}\right)^k \varrho \, d\varrho \text{ gleich } -\frac{r^k}{2k} \int_r^{r_1} \varrho \, d\varrho = -\frac{r^k}{2k}\left[\frac{r_1^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right].$$

Sonach beginnt der Koeffizient von $\cos k\vartheta$ mit der Dimension r^k und schreitet nach Potenzen $r^{k+2}, r^{k+4} \ldots$ fort. Desgleichen gestalten

sich auch die Faktoren von $\sin k\vartheta$. Damit ist der anfangs ausgesprochene Satz bewiesen, dem man auch die Form geben kann: Jede zu einer Funktion $f(x, y)$ gehörige Potentialfunktion, d. h. jedes der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

genügende Integral, ist in der Umgebung einer Stelle, in welcher $f(x, y)$ eindeutig und regulär ist, ebenfalls eindeutig und regulär, sobald man fordert, dass u nebst seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und dass die zweiten Ableitungen integrierbar sind.

§ 9.

Sind die wirkenden Massen längs einer Kurve verteilt, und bezeichnet δ die Dichtigkeit der Belegung auf dem Kurvenelement ds, so ist das Potential

$$u = \int \delta\, l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\sigma.$$

Werden die Polarkoordinaten eines Punktes auf der Kurve mit ϱ, η bezeichnet und die Koordinaten des Punktes, für welchen das Potential gebildet werden soll, mit r, ϑ, so ist falls $\varrho < r$:

$$u = l\left(\frac{1}{r}\right)\int \delta\, d\sigma + \frac{1}{r}\int \delta\varrho\cos(\vartheta-\eta)\, d\sigma + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\int \delta\varrho^2\cos 2(\vartheta-\eta)\, d\sigma + \ldots$$

Rückt also der Punkt r, ϑ ins Unendliche, so wird u unendlich wie

$$l\left(\frac{1}{r}\right)\int \delta\, d\sigma = M\, l\left(\frac{1}{r}\right)$$

für $r = \infty$, wobei M die Gesamtmasse bedeutet.

Das Potential ändert sich stetig, auch wenn der Punkt durch die Kurve hindurchtritt; denn das Integral behält einen bestimmten endlichen Wert. Betrachtet man nämlich ein beliebig kleines Kurvenstück σ_1, in dessen Innern der Punkt gelegen ist, in welchen x, y von der einen oder der andern Seite hineinrücken soll, so lässt sich das Potential u in zwei Teile zerlegen, u_1 und u_2, so dass u_1 vom Kurvenstück σ_1, u_2 von dem übrigen Teile der Kurve σ herrührt; u_2 ändert sich stetig, weil $l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ hier nicht unendlich wird. Um das Integral u_1 zu bestimmen, mache man den Punkt x, y zum Anfangspunkt eines

Koordinatensystems, auf welches der Bogen σ_1 bezogen wird. Sind a, b die rechtwinkligen Koordinaten der Kurvenpunkte, so ist

$$u_1 = \int \delta\, l \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{da^2 + db^2} = \int \delta\, l \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{db}{da}\right)^2} da.$$

Wir nehmen nun an, dass die Tangenten des Bogens σ_1 mit der Richtung der Abscissenachse keinen rechten Winkel einschliessen. Diese Bedingung ist durch geeignete Wahl der Abscissenachse immer erfüllbar, sobald die Tangenten des Bogens σ_1 sich stetig ändern. Man hat die Abscissenachse nur so zu wählen, dass sie mit der Tangente in einem Punkte des Bogens σ_1 einen spitzen Winkel einschliesst, und den Bogen σ_1 selbst hinreichend klein zu fixieren. Ferner soll die Dichte δ längs des Bogens σ_1 durchaus endlich sein. Das Potential u_1 ist dann gleich dem Produkt einer endlichen Grösse und dem Integrale

$$\int l \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, da,$$

welches zwischen den zu den Endpunkten des Bogens σ_1 gehörigen extremen Werten von a zu bilden ist. Es ist aber

$$\int l \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, da = \left[a l \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right] + \int a \frac{a da + b db}{a^2 + b^2},$$

oder wenn man $a^2 + b^2 = r^2$, $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ einführt:

$$= \left[r \cos \varphi\, l \frac{1}{r}\right] + \int \cos \varphi^2\, da + \int \cos \varphi \sin \varphi\, db.$$

Bezeichnet man die Entfernungen der Endpunkte des Bogens σ_1 vom Punkte xy mit r_1 und r_2, so ist der Wert dieses Ausdruckes kleiner als

$$r_2\, l \frac{1}{r_2} + r_1\, l \frac{1}{r_1} + abs \int da + abs \int db.$$

Die letzten beiden Integrale sind längs des Bogens σ_1 zu erstrecken, für welchen die Differentiale da und db ihr Zeichen nicht wechseln, denn die Tangenten dieses Bogens bilden spitze Winkel mit der Abscissenachse. Mithin erkennt man, dass man zuerst den Bogen σ_1 hinreichend klein wählen und sodann ein Gebiet um denselben angeben kann, so dass der Wert des Potentiales u_1 für alle Punkte in diesem Gebiete beliebig klein wird.

Für die Ableitungen des Potentiales erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int \delta \frac{\partial}{\partial x} l \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\sigma = -\int \delta \frac{x - a}{\varepsilon^2} d\sigma = -X,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int \delta \frac{\partial}{\partial y} l \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\sigma = -\int \delta \frac{y - b}{\varepsilon^2} d\sigma = -Y.$$

Die Komponenten der wirkenden Kraft sind also gleichbedeutend mit $-\frac{\partial u}{\partial x}$ und $-\frac{\partial u}{\partial y}$, solange der Punkt x, y (oder r, ϑ) nicht auf der mit Masse belegten Kurve liegt. Wenn aber dieser Punkt auf die Kurve selbst rückt, gelten diese Gleichungen nicht ohne weiteres, weil die Integrale ihre Bedeutung verlieren.

Ist z. B. die Kurve ein Kreis mit dem Radius R und die Belegung mit Masse eine gleichförmige, so ist für jeden inneren Punkt (§ 1)

$$u = Ml\left(\frac{1}{R}\right)$$

und für jeden äusseren, wenn r die Entfernung desselben vom Mittelpunkt angiebt:

$$u = Ml\left(\frac{1}{r}\right).$$

Das Potential selbst ändert sich also stetig, wenn der Punkt durch die Kreisperipherie hindurchtritt. Dagegen ist für alle inneren Punkte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

und für alle äusseren Punkte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -M\frac{x}{r^2} = -2\pi R\delta\frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -M\frac{y}{r^2} = -2\pi R\delta\frac{y}{r^2}.$$

Rückt also der äussere Punkt x, y auf die Kreisperipherie, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\pi\delta\frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2\pi\delta\frac{y}{R},$$

d. h. der Differentialquotient besitzt in einem Randpunkt zwei Werte, nämlich 0 und $-2\pi\delta\frac{x}{R}$, je nachdem die Ableitung in der in das Innere des Kreises fallenden Richtung von X, oder der entgegengesetzten gebildet wird. Nur in den Kreispunkten, in welchen $x = 0$ ist, sind diese Werte gleich. Dieselben sind dadurch ausgezeichnet, dass hier die Richtung der Differentiation mit der Tangente des Kreises zusammenfällt.

Bildet man die Differentialquotienten von u in der Richtung der Normalen, so wird für die nach aussen gerichtete Normale n_2

$$\frac{\partial u}{\partial n_2} = -M\frac{1}{R} = -2\pi\delta$$

und für die nach innen gerichtete Normale n_1

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = 0.$$

Es besteht also in dem behandelten Beispiel die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} = -2\pi\delta.$$

Diese Gleichung soll allgemein bewiesen werden. Zu dem Zwecke formen wir das Integral

$$\int \delta \frac{\partial}{\partial x} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = -\int \delta \frac{\partial}{\partial a} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

um, indem wir mit a, b die Koordinaten eines Punktes auf der Kurve bezeichnen und $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ setzen.

Es sei n die Richtung der nach innen gekehrten Normalen der Kurve, falls diese geschlossen ist, $d\sigma$ die positive Richtung des Bogenelementes, die so gewählt ist, dass die innere Normale zur linken liegt (ebenso wie die positive Ordinatenachse zur Richtung der positiven Abscissenachse). Bezeichnet man die Cosinus der Winkel, welche die Normale n mit den Achsen a und b bildet, durch $\cos(na)$ und $\cos(nb)$, so ist

$$\frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) = \cos(na) \frac{\partial}{\partial a} l\left(\frac{1}{r}\right) + \cos(nb) \frac{\partial}{\partial b} l\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} l\left(\frac{1}{r}\right) = \cos(nb) \frac{\partial}{\partial a} l\left(\frac{1}{r}\right) - \cos(na) \frac{\partial}{\partial b} l\left(\frac{1}{r}\right);$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial a} l\left(\frac{1}{r}\right) = \cos(na) \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) + \cos(nb) \frac{\partial}{\partial \sigma} l\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial b} l\left(\frac{1}{r}\right) = \cos(nb) \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) - \cos(na) \frac{\partial}{\partial \sigma} l\left(\frac{1}{r}\right).$$

Mithin wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int \delta \frac{\partial}{\partial a} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = -\int \delta \cos(na) \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \int \delta \cos(nb) \frac{\partial}{\partial \sigma} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Wir nehmen an, dass in der Umgebung der Randstelle, in welche der Punkt x, y rücken soll, die Dichte δ einen endlichen und integrierbaren Differentialquotienten besitzt und dass die Randkurve selbst dort so beschaffen ist, dass die Differentialquotienten von $\cos(na)$ und $\cos(nb)$ endlich und integrierbar sind. Letzteres ist z. B. sicher der Fall, wenn nicht nur die Tangente, sondern auch die Krümmung der Kurve an der betrachteten Stelle sich stetig ändert. Man kann alsdann den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, abgesehen von den Kurventeilen, die in endlicher Entfernung von der betrachteten Stelle liegen, durch Integrale darstellen, welche sich auf einen beliebig kleinen Teil der

belegten Kurve beziehen, und vermittelst teilweiser Integration ergiebt sich die Formel:

$$-\int \delta \cos(na)\frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \left[\delta \cos(nb) l\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \int \frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta \cos(nb))\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Das letzte Integral ändert sich stetig, wenn der Punkt x, y durch den Randpunkt hindurchtritt; denn es ist ein Potential. Vom ersten Integral soll im folgenden Paragraphen bewiesen werden, dass es den Grenzwert

$$-\pi\delta_0 \cos(na) - \int \delta \cos(na) \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r_0}\right) d\sigma$$

erhält, wenn der Punkt x, y von innen an den Randpunkt a, b tritt; dagegen den Wert

$$+\pi\delta_0 \cos(na) - \int \delta \cos(na) \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r_0}\right) d\sigma,$$

wenn der Punkt von aussen nach dem Randpunkt a, b rückt. Es bedeutet hierbei δ_0 den Wert von δ im Randpunkt a, b und r_0 die Entfernungen dieses Randpunktes von den Elementen $d\sigma$.

Mithin wird, wenn wir den Potentialwert auf der äusseren Seite mit u_e, auf der inneren mit u_i bezeichnen (längs des Randes ist $u_e = u_i$), für die Punkte des Randes, da statt $\cos(na)$ auch $\cos(nx)$, statt $\cos(nb)$ auch $\cos(ny)$ geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\partial u_e}{\partial x} = -2\pi\delta_0 \cos(nx).$$

Desgleichen ist auch

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial u_e}{\partial y} = -2\pi\delta_0 \cos(ny).$$

Also wird für die nach innen gerichtete Normale:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial u_e}{\partial n} = -2\pi\delta_0,$$

oder wenn wir die nach innen und die nach aussen gerichtete Normale mit n_1 und n_2 unterscheiden und den Wert des Potentiales am Rande einfach mit U bezeichnen:

$$\frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2} = -2\pi\delta_0.$$

Bei dieser Gleichung muss man indessen eingedenk bleiben, dass sie eigentlich eine Grenzgleichung darstellt, indem die Differentialquotienten, welche sie enthält, zunächst für Potentialwerte gebildet

sind, die zu benachbarten Punkten auf beiden Seiten des Randes gehören.*

Der Fall, wo der Punkt x, y in einen Eckpunkt der Kurve rückt, oder in einen Endpunkt, wenn dieselbe nicht geschlossen ist, soll nachher noch erörtert werden.

§ 10.

Wir bezeichnen mit τ eine beliebige, aber vollständig begrenzte ebene Fläche, mit $d\sigma$ ein Element des Randes. In diesem Element mit den Koordinaten a, b errichten wir nach dem Innern der Fläche τ die Normale n und bezeichnen mit (rn) den Winkel zwischen dieser Richtung der Normalen und der Verbindungslinie r des Punktes a, b und des Punktes x, y (und zwar in der Richtung von a, b nach x, y). Das Integral

$$\int \frac{\cos(rn)}{r} d\sigma$$

ist gleich dem Integral

$$\int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial a}\cos(na) + \frac{\partial r}{\partial b}\cos(nb)\right) = \frac{1}{r}\cos(rn).$$

Beschreibt man um den Punkt x, y als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius 1, so schneiden die von x, y an das Kurvenelement $d\sigma$ ausgehenden Radien ein Element $(d\sigma)_x$ aus dem Kreise aus, sodass

$$r\,(d\sigma)_x = d\sigma\cos(rn),$$

und zwar ist das Element $(d\sigma)_x$ positiv oder negativ, je nachdem das Bogenelement $d\sigma$ seine innere oder äussere Seite dem Punkte x, y zukehrt, oder je nachdem der von x, y ausgehende Radius an der Stelle $d\sigma$ aus der Fläche τ austritt oder in dieselbe eintritt. Man kann die Grösse $(d\sigma)_x$ auch als die scheinbare Grösse des Kurvenelementes $d\sigma$, vom Punkte x, y aus gesehen, bezeichnen, wobei dieser Wert positiv oder negativ ist, je nachdem das Element $d\sigma$ seine innere oder äussere Seite dem Punkte x, y zukehrt. Demnach ist

$$\int \frac{\cos(rn)}{r} d\sigma = \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \int (d\sigma)_x.$$

---

* Auch diese Gleichung lässt sich nach einem Verfahren, welches dem von Herrn Hölder für Flächenpotentiale im Raume analog ist, beweisen, wenn für die Änderung der Dichte δ nur eine Bedingung von der Form

$$\text{abs}\,[\delta - \delta_0] < Ar^{\mu}$$

angenommen wird.

Liegt nun der Punkt x, y im Innern der geschlossenen Kurve, so wird

$$\int (d\sigma)_x = 2\pi.$$

Liegt der Punkt ausserhalb der geschlossenen Kurve, so ist

$$\int (d\sigma)_x = 0.$$

Liegt der Punkt auf der Kurve selbst, und zwar an einer Stelle, wo die Tangente sich stetig ändert und keine Spitze vorhanden ist, so ist, wenn wir jetzt zum Unterschiede von den vorigen Fällen statt des Index x den Index s schreiben:

$$\int (d\sigma)_s = \pi.$$

Ist aber die betrachtete Randstelle eine Ecke, und ist α die Grösse des Winkels, den die Tangenten an dieser Ecke miteinander bilden, und zwar der nach innen gekehrte Scheitelwinkel, so ist

$$\int (d\sigma)_s = \alpha.$$

Der analytische Beweis dieser Sätze ist leicht zu führen dadurch, dass man die Kurve auf ein Polarkoordinatensystem mit dem Punkt x als Pol bezieht, wenn man annimmt, dass in allen Punkten des Randes (bis auf einzelne Eckpunkte oder Spitzen) eine bestimmte Tangente vorhanden ist, deren Richtung sich stetig ändert, und dass ein vom Punkte x, y ausgehender Radius immer nur in einer endlichen Anzahl von Punkten die Randkurve schneidet (es sei denn, was auch zulässig ist, dass er eine ganze Strecke mit dem Rande gemein hat). Unter allgemeineren Voraussetzungen der blossen Integrierbarkeit des Bogenelementes $d\sigma$ lassen sich die Gleichungen zwar auch beweisen, doch wird der Beweis kompliziert.

Für den Fall, dass die Kurve keine geschlossene ist, hat man zuerst diejenige Seite, nach welcher die Normalen konstruiert werden, als positive, von der anderen, welche die negative heissen soll, willkürlich festzusetzen. Der Wert des Integrales stellt für alle Punkte, die nicht auf dem Kurvenbogen liegen, den Winkel dar, unter welchem derselbe von dem Punkt aus gesehen wird, und zwar mit positivem oder negativem Zeichen, je nachdem die vom Punkte innerhalb dieses Winkels ausgehenden Strahlen die positive oder negative Seite der Kurve zuerst treffen. Liegt der Punkt s auf der Kurve, so setzt sich der Wert des Integrales aus den beiden Winkeln zusammen, welche die vom Punkte s an die Endpunkte des Bogens gezogenen Sehnen mit der Tangente oder den beiden Tangenten im Punkte s einschliessen.

Es sei nun U eine in den Punkten der Kurve σ überall endliche und stetige Funktion, und es werde das Integral

$$u = \int U \frac{\cos(rn)}{r} \, d\sigma = \int U \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \int U (d\sigma)_x$$

betrachtet. Die Funktion u ist eine Potentialfunktion, d. h. sie genügt in allen Punkten der Ebene, mit Ausnahme der Kurvenpunkte, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Es soll der Wert ermittelt werden, nach welchem u konvergiert, wenn der Punkt x, y in einen Punkt s des Randes rückt; dabei sind die Fälle zu unterscheiden, je nachdem x, y sich von der positiven Seite oder von der negativen der Kurve nähert.

Umgiebt man die Stelle s mit einem beliebig kleinen Kreise, welcher auf der Kurve den Bogen σ_1 ausschneidet, so kann man das Integral u in zwei Teile u_1 und u_2 zerlegen, von denen sich der eine auf den Bogen σ_1, der andere auf den noch übrigen Teil σ_2 von σ bezieht. Da in dem Integrale

$$u_2 = \int U \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_2$$

die Funktion $\frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right)$ endlich und stetig bleibt, auch wenn der Punkt x in den Punkt s hineinrückt, so ist

$$\lim u_2 = \int U (d\sigma_2)_s.$$

Im Integrale

$$u_1 = \int U (d\sigma_1)_x$$

bezeichne man mit U_s den Wert der Funktion U im Punkte s. Da die Länge σ_1 beliebig klein gewählt werden kann, so kann dieselbe so fixiert werden, dass alle Werte, welche die Funktion U auf dem Bogen σ_1 besitzt, von dem Werte U_s um eine Grösse differieren, die kleiner ist als eine beliebig kleine Grösse ε. Es ist demnach

$$u_1 = U_s \int (d\sigma_1)_x \pm \left(< \varepsilon \int abs\,(d\sigma_1)_x\right).$$

Rückt nun der Punkt x in den Randpunkt s, so geht $\int (d\sigma_1)_x$ in den Winkel α' über, welchen die von dem Punkte s an die Endpunkte des Bogens σ_1 gezogenen Sehnen miteinander bilden. Dabei ist, wenn der Punkt sich von der positiven Seite der Kurve nähert, α' ein positiver Wert, und zwar derjenige Scheitelwinkel, welcher den Punkt x, y nicht enthält. Also ist

$$\lim u = \lim u_1 + \lim u_2 = U_s \alpha' \pm \left(< \varepsilon \int abs\,(d\sigma_1)_x\right) + \int U (d\sigma_2)_s.$$

Die Grösse $\int abs(d\sigma_1)_x$ ist jedenfalls eine endliche, wenn wir annehmen, dass der Bogen σ_1 keinen der vom Punkte x ausgehenden Strahlen in unendlich vielen Punkten durchschneidet. Wird nun die Grösse σ_1 immer mehr verkleinert, so geht α' in den Winkel über, welchen die Tangenten der Kurve im Punkte s miteinander bilden, d. h. in den Wert π, wenn die Kurve daselbst keine Ecke oder Spitze hat, und in den Wert $2\pi - \alpha$, wenn s ein Eckpunkt mit der Winkelöffnung α auf der positiven Seite der Kurve ist. Bei Verkleinerung von σ_1 konvergiert ε nach null; ferner erhält $\int U(d\sigma_2)_s$ einen bestimmten Wert, den wir mit

$$\int U(d\sigma)_s$$

bezeichnen können. Denn die Änderungen, welche jenes Integral erfährt, wenn σ_2 in σ übergeht, sind kleiner als der Maximalwert von U multipliziert mit dem Integrale $\int abs(d\sigma_1)_s$. Hat nun die Kurve in der Umgebung der Stelle s nicht unendlich viele Wendungen, so konvergiert dieses Integral mit σ_1 nach null. Also wird

$$\lim u = \pi U_s + \int U(d\sigma)_s \text{ oder } \lim u = (2\pi - \alpha)\, U_s + \int U(d\sigma)_s$$

je nach der Beschaffenheit des Randpunktes s. Nähert sich aber der Punkt x, y von der entgegengesetzten Seite dem Randpunkte s, so wird entsprechend den vorigen beiden Fällen:

$$\lim u = -\pi U_s + \int U(d\sigma)_s \text{ oder } \lim u = -\alpha U_s + \int U(d\sigma)_s.$$

In einem Endpunkt der Kurve hängt der Grenzwert der Funktion u von der Richtung ab, auf welcher der Punkt x, y in den Randpunkt hineinrückt. Der Übergang der Funktion u in ihren Grenzwert ist dabei ein gleichmässig stetiger in der Umgebung jedes Randpunktes s, in welchem U stetig ist, d. h. um jeden solchen Randpunkt lässt sich ein Bereich angeben, das einerseits von einem Teil der Randkurve σ_1, andererseits von einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Punkt s ist, begrenzt wird, sodass für alle Punkte x, y, die in das Innere dieses Bereiches fallen, der Wert der Funktion u nur noch beliebig wenig von dem Grenzwerte, den u in s besitzt, abweicht.

Denn man kann erstlich σ_1 so klein wählen, dass $\varepsilon \int abs(d\sigma_1)_x$ kleiner wird als $\frac{\delta}{6}$; es ist dann

$$u_1 = U_s \int (d\sigma_1)_x \pm \left(< \frac{\delta}{6}\right).$$

Ferner kann man um den Punkt s einen Kreis beschreiben, sodass für alle Punkte x im Innern dieses Kreises der Winkel α', unter welchem σ_1 von s aus erscheint, beliebig wenig von dem Winkel

$\int (d\sigma_1)_x$ abweicht, sodass $[U_s\alpha' - U_s\int (d\sigma_1)_x] < \frac{\delta}{3}$ wird. Endlich lässt sich, da $(d\sigma_2)_x = \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_2$ eine stetige Funktion der Variabelen x und y ist, um den Punkt s ein Bereich angeben, sodass

$$abs\left[\int U(d\sigma_2)_x - \int U(d\sigma_2)_s\right] < \frac{\delta}{3}$$

wird. Ist dies geschehen, so unterscheidet sich in diesem Bereich der Wert von u von dem Grenzwert in s um weniger als δ.

Im Gegensatze hierzu ist zu bemerken, dass der Übergang in den Grenzwert kein gleichmässig stetiger sein würde in der Umgebung solcher Stellen, an denen U unstetig wird, sei es, dass es eine sprungweise Wertänderung erleidet oder unbestimmt ist.

Die Funktion

$$u = \int U \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

wird das Potential einer Doppelbelegung der Kurve σ mit dem Moment U genannt. Die Grenzwerte des Potentiales einer Doppelbelegung sind also voneinander verschieden, je nachdem der Punkt x, y von der einen oder von der andern Seite auf die Kurve rückt. Unterscheidet man die beiden Werte durch U_i und U_e, wobei die innere Seite i diejenige ist, auf welcher die Normalen n konstruiert sind, so ist die Gleichung bewiesen:

$$U_i - U_e = 2\pi U_s.$$

Ist die Funktion U bloss endlich und integrierbar, so ist die Differenz $U_i - U_e$ an allen den Stellen s, in deren Umgebung die Schwankungen der Funktion U kleiner sind als eine Grösse ε, von $2\pi U_s$ um eine Grösse unterschieden, welche kleiner ist als das Produkt von ε mit einer endlichen Grösse.

§ 11.

Es bezeichne $N = -\int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm$ die in die Richtung n fallende Komponente der Kraft, welche von einem Massensystem, dessen Elemente dm die Koordinaten x, y haben sollen, auf einen Punkt a, b (mit der Masse 1) ausgeübt wird. Die wirkende Masse kann über eine ebene Fläche oder eine Kurve ausgebreitet sein. Den Punkt a, b denken wir uns auf einer geschlossenen

Kurve σ gelegen, deren Flächeninhalt τ heissen möge. Wir bilden über diese ganze Kurve das Integral

$$-\int N\,d\sigma = \int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) dm,$$

wobei n die innere Normale der Kurve in jedem Elemente $d\sigma$ angeben soll. Wenn nun r nicht null wird, d. h. wenn die Kurve σ keine wirkenden Massen enthält, so kann man die Reihenfolge der Integrationen vertauschen, und es ist

$$-\int N\,d\sigma = \int dm \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Da die Komponente $-N$ gleich ist der Ableitung des Potentiales u nach der Richtung n, so ist

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \int dm \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Liegen die Massen sämtlich innerhalb der geschlossenen Kurve σ, so ist für jedes Element dm

$$\int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 2\pi, \quad \text{also} \quad \int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 2\pi \int dm = 2\pi M.$$

Liegen die Massen sämtlich ausserhalb der Kurve, so ist für jedes Element dm

$$\int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 0, \quad \text{also} \quad \int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Es sei nun die Masse M ausgebreitet über eine ebene Fläche S und die Fläche τ enthalte einen Teil dieser Fläche. Nun ist

$$\int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) dm$$

durch eine Grenzbetrachtung zu bestimmen, da in den Punkten der Randkurve von τ, welche in S liegen, r gleich null wird. Man scheide daher zunächst die Massen aus, welche innerhalb eines beliebig schmalen Streifens liegen, der den Teil der Kurve σ, welcher innerhalb S liegt, umgiebt. Das so veränderte Massensystem heisse M'. Es ist dann

$$\int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) dm'$$

zu bilden, und der Grenzwert aufzusuchen für $M' = M$. Nun ist

$$\int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) dm' = \int dm' \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

und es wird das innere Integral gleich 2π oder 0, je nachdem dm' innerhalb der Fläche τ liegt oder ausserhalb. Also ist der Wert gleich $2\pi M'_1$, wobei M'_1 den Teil der Masse M' bedeutet, der innerhalb τ fällt. Lässt man M' gleich M werden, so ist

$$\lim_{M'=M} \int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) dm' = 2\pi M_1,$$

wobei M_1 den Teil von M angiebt, der im Innern der Fläche τ sich befindet. Es ist nun

$$\lim_{M'=M} \int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm' = \int d\sigma \lim_{M'=M} \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm' = \int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm,$$

weil wie früher bewiesen $\int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) dm$ einen bestimmten Wert hat, auch für solche Punkte a, b, die innerhalb der mit Masse belegten Fläche liegen, und es ist auch

$$\int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) dm = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Also besteht auch jetzt noch die Gleichung

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 2\pi M_1,$$

wobei M_1 den Teil der Masse bedeutet, der im Innern der Kurve σ sich befindet.

Aus diesen Integralformeln folgt: Ist das Potential einer mit Masse erfüllten Fläche im Innern dieser Fläche allenthalben konstant, so ist in jedem beliebig kleinen Gebiete die Summe der Massen gleich null. Da die Summe der Massen für jedes Gebiet τ gleich $\int \delta\, d\tau$ ist, so folgt hieraus weiter, dass der mittlere Wert der Dichtigkeit in jedem beliebig kleinen Gebiete null ist. Ist also die Dichtigkeit stetig, so ist sie überhaupt gleich null. Ist die Dichtigkeit nicht stetig, sondern nur endlich und integrierbar, so lassen sich alle die Stellen, an denen ihr Betrag grösser ist als irgend eine noch so kleine Grösse ε, in Flächenelemente einschliessen, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann.

Es sei die Masse ausgebreitet auf einer Kurve c. Ein Teil dieser Kurve sei in der Fläche τ enthalten. Wir müssen jetzt wieder die Massenelemente, die in den Schnittpunkten des Randes σ von τ und

der mit Masse belegten Kurve c liegen, durch beliebig kleine Bogenstücke von c ausscheiden. Sonach wird wie vorhin

$$\int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm'$$

das Integral über die übrigen Massenelemente, und es ist

$$\int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm' = \int dm' \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 2\pi M'_1,$$

wobei M'_1 den Teil von M' bezeichnet, der innerhalb der Fläche τ liegt. Es ist also auch

$$\lim_{M'=M} \int dm' \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 2\pi M_1.$$

Man kann dieses letzte Integral noch in anderer Form darstellen. Auf der Kurve σ schneide man die Schnittpunkte, welche Massenelemente enthalten, durch beliebig kleine Bogenstücke aus. Diese Stücke mögen zusammen σ_1 heissen, der übrige Teil von σ heisse σ_2; so ist

$$\int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm' = \int d\sigma_1 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm' + \int d\sigma_2 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm'.$$

Im zweiten Integral, welches sich auf σ_2 bezieht, wird r nicht null; denn die Elemente $d\sigma_2$ behalten eine bestimmte endliche Entfernung von allen Massenelementen dm. Es ist also

$$\int d\sigma \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm'$$

$$= \int d\sigma_2 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm + \int (dm' - dm) \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_2 + \int d\sigma_1 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm'.$$

Lässt man σ_1 nach null konvergieren, so wird das letzte Integral gleich null; im mittleren Integral bleibt

$$\int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_2$$

jedenfalls eine endliche Grösse; denn es giebt den Winkel an, unter welchem der Bogen σ_2 oder schliesslich der Bogen σ von jedem Massenelement, welches durch $dm - dm'$ dargestellt ist, gesehen wird. Demnach verschwindet das mittlere Integral, wenn $M' = M$ wird, und sonach ist

$$\lim_{M'=M} \int dm' \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \lim_{\sigma_2=\sigma} \int d\sigma_2 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm,$$

also auch

$$\lim_{\sigma_2 = \sigma} \int d\sigma_2 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm = 2\pi M_1$$

oder

$$\lim_{\sigma_2 = \sigma} \int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma_2 = 2\pi M_1.$$

Hieraus folgt der Satz: Ist das Potential einer Kurvenbelegung zu beiden Seiten der belegten Kurve konstant, so ist die Summe der Massen auf jedem beliebig kleinen Teile der Kurve gleich null. Ist also die Dichtigkeit stetig, so ist sie allenthalben gleich null.

Hieraus folgt weiter: Ist die mit Masse belegte Kurve nicht geschlossen, so muss die Summe der Massen auf jedem beliebig kleinen Kurvenstück gleich null sein, falls das Potential in irgend einem Gebiet der Ebene konstant ist. Denn nach dem im § 2 bewiesenen Satze kann man in diesem Falle schliessen, dass es für alle Punkte der Ebene konstant ist.

Bezüglich der geschlossenen Kurven werden die analogen Verhältnisse im zweiten Kapitel noch näher erläutert werden.

Man kann nun irgend einen Teil c der mit Masse belegten Kurve durch zwei beliebig nahe konstruierte Kurvenbogen c_1 und c_2 einschliessen. Führt man das Integral längs dieser beiden Kurven, indem man die Richtung n der Normale so wählt, dass sie in das Innere des von den Kurven c_1 und c_2 umschlossenen Gebietes führt, so wird

$$\int dc_1 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm + \int dc_2 \int \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{r}\right) dm = 2\pi M_1$$

oder

$$\int dc_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \int dc_2 \frac{\partial u}{\partial n} = 2\pi M_1.$$

Die beiden Kurven c_1 und c_2 können aber schliesslich mit der Kurve c zusammenfallen. Bezeichnen wir die Potentialwerte, je nachdem sie auf der inneren Seite von c oder auf der äusseren liegen, mit U_i und U_e, und lassen wir c_1 von der inneren, c_2 von der äusseren Seite an c rücken, so ist, wenn n die Richtung der Normalen auf der Innenseite von c angiebt:

$$-\lim_{c_1 = c} \int \frac{\partial U_i}{\partial n} dc_1 + \lim_{c_2 = c} \int \frac{\partial U_e}{\partial n} dc_2 = 2\pi M_1$$

oder in kürzerer, jedoch im allgemeinen minder strengen Bezeichnung

$$\int \left(\frac{\partial U_e}{\partial n} - \frac{\partial U_i}{\partial n}\right) dc = 2\pi M_1.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$\int \left(\frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_e}{\partial n} + 2\pi\delta \right) dc = 0,$$

so erkennt man, dass sie eine Verallgemeinerung der am Schlusse des § 9 bewiesenen Relation ist. Hier bezieht sich die Gleichung auf ein beliebiges Stück der mit Masse belegten Kurve, während sie dort für eine bestimmte Stelle bewiesen wurde. Während aber dort die Giltigkeit nur unter der Annahme gezeigt wurde, dass die Dichtigkeit eine differentiierbare Funktion ist, unterliegt hier δ nur der Voraussetzung der Integrierbarkeit.

§ 12.

Die Gleichung, welche im vorigen Paragraph für ein Potential bewiesen wurde, bei welchem die Dichtigkeit der Flächenbelegung δ ist, nämlich

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 2\pi M_1 = 2\pi \int \delta\, d\tau,$$

lässt sich zufolge der Relation (§ 6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\, 2\pi\delta$$

auch in der Form schreiben:

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = -\int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\tau = -\iint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx\, dy.$$

Das Flächenintegral auf der rechten Seite ist dabei ausgedehnt über ein geschlossenes Gebiet, das Kurvenintegral auf der linken Seite bezieht sich auf den Rand dieses Gebietes.

In dieser Form sagt die Gleichung eine allgemeine Integraleigenschaft irgend einer Funktion zweier Variabelen aus, welche für ein im Endlichen geschlossenes Gebiet so definiert ist, dass die Funktion nebst ihren ersten Ableitungen im Innern dieses Gebietes endlich und stetig ist, so zwar, dass ihre ersten Ableitungen auch beim Übergang in den Rand des Gebietes stetig bleiben, während die zweiten Ableitungen integrierbar sein müssen.

Denn bezeichnet f eine Funktion, deren Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in einem Gebiet τ integrierbar sind, so ist

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} d\tau = \int\int \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy = \int dy\, [f], \quad \int\int \frac{\partial f}{\partial y} dx\, dy = \int dx\, [f],$$

wobei die Integrale rechts nur noch für die Punkte des Randes zu bilden sind. Es ist aber, wenn n die Richtung der inneren Normalen angiebt, an den Austrittsstellen der Parallelen:

$$dx = -d\sigma \cos(ny), \quad dy = -d\sigma \cos(nx),$$

an den Eintrittsstellen:

$$dx = d\sigma \cos(ny), \quad dy = d\sigma \cos(nx).$$

Der Beweis ist einfach zu führen, wenn man voraussetzt, dass die Randkurve überall eine bestimmte Tangente hat, die sich im allgemeinen stetig ändert, sodass nur an einzelnen Punkten Ecken oder Spitzen auftreten, und dass die Parallelen zur x- und y-Achse den Rand immer nur in einer endlichen Anzahl von Punkten schneiden. Es wird also

$$\int\int \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = -\int f \cos(nx)\, d\sigma, \quad \int\int \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = -\int f \cos(ny)\, d\sigma.$$

Wird hier für f im ersten Integral der Wert $\frac{\partial u}{\partial x}$, im zweiten der Wert $\frac{\partial u}{\partial y}$ eingeführt, so erhält man die Gleichungen:

$$\int\int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = -\int \frac{\partial u}{\partial x} \cos(nx)\, d\sigma, \int\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy = -\int \frac{\partial u}{\partial y} \cos(ny)\, d\sigma,$$

folglich durch Addition

$$\text{I)} \qquad \int\int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = -\int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Aus denselben Integralen ergiebt sich, wenn man für f den Wert $\frac{\partial (u^2)}{\partial x} = 2u \frac{\partial u}{\partial x}$ und sodann den Wert $\frac{\partial (u^2)}{\partial y} = 2u \frac{\partial u}{\partial y}$ einführt.

$$\text{II)} \quad \int\int \left[u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx dy = -\int u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Wird schliesslich für f der Wert $\left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ und sodann der Wert $\left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ substituiert, so erhält man

$$\text{III)} \int\int \left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] dx\, dy = -\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Aus diesen Greenschen Integralformeln (Crelles Journal B. 44) lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Erstens: Ist σ eine geschlossene Kurve mit der inneren Normale n, und sind u und v zwei Potentialfunktionen, welche also im Innern der Kurve nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten stetig sind und den partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügen, so ist

$$\text{Ia)} \qquad \int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

$$\text{IIa)} \qquad \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

$$\text{IIIa)} \qquad \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Man bezeichne nun mit ε_a die Entfernungen eines bestimmten Punktes, welcher ausserhalb der von σ umschlossenen Fläche liegt, von den Punkten des Randes σ, und es werde $l\left(\frac{1}{\varepsilon_a}\right)$ gleich T_a gesetzt; alsdann kann in der Formel IIIa) an Stelle der Funktion v die Funktion T_a eingeführt werden, und es ist

$$\text{IVa)} \qquad \int \left(u \frac{\partial T_a}{\partial n} - T_a \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Ist aber ε_i die Entfernung eines innerhalb σ gelegenen Punktes i von den Punkten des Randes, und setzt man $T_i = l\left(\frac{1}{\varepsilon_i}\right)$, so kann die Formel III) nicht ohne weiteres angewandt werden dadurch, dass man $v = T_i$ annimmt, denn es wird die Funktion T_i in dem Punkte i unendlich. Umschliesst man den Punkt i mit einem beliebig kleinen Kreise, dessen Radius r heisse, so gilt die Formel III für die Fläche, welche von dem Rande und diesem Kreise begrenzt ist. Da nun auf diesem Kreise

$$T_i = l\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial T_i}{\partial n} = -\frac{1}{r}, \quad d\sigma = r d\vartheta$$

ist, so wird der Bestandteil des Integrales, welcher sich auf diesen Kreis bezieht

$$-\int u d\vartheta - l\left(\frac{1}{r}\right) r \int \frac{\partial u}{\partial n} d\vartheta$$

oder gleich $-\int u d\vartheta$, weil $\int \frac{\partial u}{\partial n} d\vartheta$ zufolge der Gleichung Ia) ver-

schwindet. Lässt man r nach null konvergieren, so wird dieser Wert gleich $-2\pi u_i$, wobei u_i den Wert von u im Punkte i bezeichnet; also ist

$$\text{Va)} \qquad \int \left(u \frac{\partial T_i}{\partial n} - T_i \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 2\pi u_i.$$

Die Gleichungen Ia) bis Va) gelten auch, wenn der Rand aus mehreren Kurven besteht, die ebene Fläche also eine mehrfach zusammenhängende ist.

Zweitens: Es sei σ eine geschlossene Kurve mit der äusseren Normalen N, u und v seien zwei Potentialfunktionen, welche im äusseren Gebiet der Kurve überall endlich und stetig sind und also den Differentialgleichungen genügen: $\Delta^2 u = 0$, $\Delta^2 v = 0$.

Im Unendlichen aber sollen diese Funktionen sich wie Potentiale verhalten, d. h. (§ 1) entweder verschwinden oder unendlich werden, wie $Ml\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r = \infty$. Auf einem beliebig grossen Kreise besteht dann die konvergente Entwickelung

$$u = Ml\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta).$$

Man umschliesse nun die Kurve σ mit einem Kreise von beliebig grossem Radius r und bilde die obigen Integralformeln für das Gebiet, welches von σ und diesem Kreise begrenzt ist. Es wird dann

$$\int \frac{\partial u}{\partial N} d\sigma - \int \frac{\partial u}{\partial r} r d\vartheta = 0.$$

Aus der Entwickelung für u folgt aber

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -M\frac{1}{r} - \sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{1}{r}\right)^{k+1} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta),$$

also $\int \frac{\partial u}{\partial r} r\,d\vartheta = -2\pi M$. Mithin ist

$$\text{Ib)} \qquad \int \frac{\partial u}{\partial N} d\sigma = -2\pi M.$$

Ferner wird

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy = \int u \frac{\partial u}{\partial r} r\,d\vartheta - \int u \frac{\partial u}{\partial N} d\sigma$$

und da

$$\lim_{r=\infty} \int u \frac{\partial u}{\partial r} r\,d\vartheta = -M^2 l\left(\frac{1}{r}\right) \int d\vartheta = -2\pi M^2 l\left(\frac{1}{r}\right) \text{ für } r = \infty,$$

so ist

$$\text{IIb)}\quad \int u \frac{\partial u}{\partial N}\, d\sigma + \int\limits_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0 \text{ oder } +\infty,$$

je nachdem M gleich null oder von null verschieden ist. Der Index A besagt, dass das Doppelintegral für die ganze unendliche Fläche zu bilden ist, die ausserhalb der Kurve σ liegt.

Endlich erhält man

$$\text{IIIb)}\qquad \int \left(u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N}\right) d\sigma = 0,$$

wenn v ebenfalls solch eine Potentialfunktion ist, dass für dieselbe eine Entwickelung der nämlichen Art wie für u besteht.

Setzt man hier für v die Funktion $T_i = l\left(\frac{1}{\varepsilon_i}\right)$ oder $T_a = l\left(\frac{1}{\varepsilon_a}\right)$, wobei ε_i die Entfernung eines innerhalb σ gelegenen Punktes, und ε_a die Entfernung eines ausserhalb σ gelegenen Punktes von den Randpunkten σ angiebt, so wird

$$\text{IVb)}\qquad \int \left(u \frac{\partial T_i}{\partial N} - T_i \frac{\partial u}{\partial N}\right) d\sigma = 0.$$

$$\text{Vb)}\qquad \int \left(u \frac{\partial T_a}{\partial N} - T_a \frac{\partial u}{\partial N}\right) d\sigma = 2\pi u_a.$$

Die vorstehenden Integralformeln, von denen sich Ib bis Vb nicht allgemein auf Potentialfunktionen, sondern auf Potentiale, d. h. auf solche Funktionen beziehen, die überdies ein bestimmtes Verhalten im Unendlichen aufweisen, sind insgesamt vollkommen bewiesen, wenn die Randkurven innerhalb des ebenen Bereiches liegen, für welchen die Funktion u als eine reguläre harmonische Funktion gegeben ist. Dagegen bedürfen sie noch einer näheren Begründung, wenn die Randkurven so gelegen sind, dass sie teilweise oder ganz die Grenze des Gebietes definieren, über welches die Funktion nicht mehr als reguläre analytische Funktion fortgesetzt werden kann. Man nennt diese alsdann die natürliche Begrenzung des Gebietes oder Teile der natürlichen Begrenzung. Sobald es sich um die Bestimmung der Funktion aus den Werten am Rande handelt, wird daher eine genauere Prüfung dieser Formeln notwendig. (Kap. 3 und 4.)

§ 13.

Ist die Kurve σ ein Kreis mit dem Radius r, und ist u eine harmonische Funktion für das Innere dieses Kreises, so ist für jeden Punkt im Innern

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int u \frac{\partial T_i}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int T_i \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma.$$

Demnach wird für den Mittelpunkt des Kreises

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int u\,d\vartheta,$$

d. h. der Wert der Potentialfunktion in dem Mittelpunkt eines Kreises ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Werten längs der Peripherie desselben.

Hieraus folgt: Ist eine Potentialfunktion für irgend eine endliche Fläche definiert, so kann der Wert in keinem Punkte, welcher im Innern der Fläche liegt, ein Maximum oder Minimum sein.

Eine Funktion zweier Variabelen, welche in einem Gebiete einschliesslich des Randes stetig ist, besitzt aber entweder im Innern oder auf dem Rande des Gebietes Maximal- und Minimalwerte. Mithin erkennt man, dass die Maximal- und Minimalwerte einer Potentialfunktion stets auf dem Rande der Fläche liegen, es sei denn, dass die Funktion überhaupt eine Konstante ist. Dieses tritt sonach immer ein, wenn die Funktion auf dem Rande einen konstanten Wert hat.

Bildet die Fläche das äussere Gebiet einer geschlossenen Kurve σ, so können die Maximal- und Minimalwerte nur auf dem Rande der Fläche oder im Unendlichen gelegen sein. Hat die Funktion im Unendlichen den Wert null, sodass u auf einem Kreise mit beliebig grossem Radius darstellbar ist durch die Reihe

$$u = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta),$$

so ist auf solch einem Kreise $\int u\,d\vartheta = 0$; d. h. die Werte von u sind auf dem Kreise mit dem Radius r entweder sämtlich gleich null, und dann ist u überhaupt gleich null, weil die Koeffizienten a_k und b_k alsdann alle verschwinden müssen (nach demselben Verfahren wie auf Seite 12 zu beweisen), oder es sind sowohl positive wie negative Werte von u auf dem Kreise vorhanden. Im letzteren Falle ist der Wert null, welchen u im Unendlichen besitzt, weder ein Maximum, noch ein Minimum. Hat also eine Potentialfunktion im Unendlichen den Wert null, so liegen die extremen Werte derselben auf dem Rande der Kurve σ, es sei denn, dass u überhaupt den Wert null hat.

Aus diesem Satze folgt: Eine Potentialfunktion, welche für das äussere Gebiet einer Kurve σ definiert ist und im Unendlichen den Wert null hat, kann auf der Kurve σ nicht konstant sein, es sei denn, dass sie überall den Wert null hat.

§ 14.

Die Integralformel Va)

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n}\, T d\sigma$$

stellt den Wert dar, welchen die Funktion u für jeden Punkt im Innern eines Gebietes besitzt, vermittelst der Werte U und $\frac{\partial U}{\partial n}$ längs des Randes. Solche auf die Randpunkte bezüglichen Werte sollen fortan mit grossen Buchstaben bezeichnet werden.

Das erste Integral ist das Potential einer einfachen, das zweite das Potential einer Doppelbelegung. In diesem Umstande ist es begründet, dass die Theorie der Potentiale auch für die harmonischen Funktionen in der Ebene von besonderer Bedeutung ist.

Die Werte U und $\frac{\partial U}{\partial n}$ sind nicht unabhängig voneinander; es muss zwischen denselben eine Relation bestehen, die ermittelt werden soll. Betrachtet man die beiden Bestandteile der rechten Seite gesondert und setzt man

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma, \quad u_2 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n}\, T d\sigma,$$

so sind u_1 und u_2 selbst wieder harmonische Funktionen, sodass die Werte derselben für jeden inneren Punkt in der nämlichen Weise darstellbar sind durch die Werte, welche U_1 und U_2 und ihre Ableitungen $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ und $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ am Rande besitzen; d. h. es ist

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int U_1 \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U_1}{\partial n}\, T d\sigma,$$

$$u_2 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n}\, T d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int U_2 \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U_2}{\partial n}\, T d\sigma.$$

Aus beiden Gleichungen folgt übereinstimmend

$$\frac{1}{2\pi}\int U_2 \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U_1}{\partial n}\, T d\sigma.$$

Es ist aber (§ 10) der Wert, welchen u_1 am Rande besitzt, gleich

$$\frac{1}{2}U + \frac{1}{2\pi}\int U\, (d\sigma)_s.$$

Wir wollen die Funktion $\frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_s$ mit P bezeichnen und sie die zugeordnete Funktion von U nennen; also ist

$$U_1 = \frac{1}{2}\,U + \frac{1}{2}\,P \text{ und folglich } U_2 = \frac{1}{2}\,U - \frac{1}{2}\,P,$$

weil $U_1 + U_2 = U$ ist. Mithin wird

$$\frac{1}{2\pi}\int (U-P)\frac{\partial T}{\partial n}\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{\partial P}{\partial n}\right) T\,d\sigma,$$

die zwischen U und $\frac{\partial U}{\partial n}$ bestehende Relation, in welcher P die zugeordnete Funktion von U ist, und $\frac{\partial P}{\partial n}$ die Ableitung derjenigen harmonischen Funktion darstellt, welche am Rande den Wert P hat.

Ist z. B. die Kurve σ ein Kreis mit dem Radius a, so ist

$$P = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_s = \frac{1}{\pi}\int U\,\frac{\cos(\varrho n)}{\varrho}\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int U\,\frac{\cos(\varrho n)}{\varrho}\,a\,d\vartheta,$$

wenn man mit ϱ die Entfernungen eines festen Punktes der Peripherie von dem Elemente $d\sigma$ und mit n die innere Richtung des zu dem Elemente $d\sigma$ gehörigen Radius bezeichnet. Es ist aber

$$2a\cos(\varrho n) = \varrho, \text{ also } \frac{\cos(\varrho n)}{\varrho} = \frac{1}{2a},$$

folglich wird hier

$$P = \frac{1}{2\pi}\int U\,d\vartheta,$$

also konstant für alle Punkte des Kreises; demnach $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$. Mithin besteht auf einem Kreise die Relation:

$$\frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial T}{\partial n}\,d\sigma - P = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial U}{\partial n}\,T\,d\sigma,$$

sodass an Stelle der Integralformel Va) für einen Kreis die Gleichungen gelten

$$u = \frac{1}{\pi}\int U\frac{\partial T}{\partial n}\,d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int U\,d\vartheta$$

oder

$$u = -\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial U}{\partial n}\,T\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int U\,d\vartheta.$$

Mit Hilfe derselben kann für einen Kreis ohne weiteres die Aufgabe gelöst werden: eine harmonische Funktion für das Innere zu konstruieren, wenn entweder die Werte der Funktion oder die Werte der Ableitungen nach der Normalen längs der Peripherie gegeben sind.

Im ersten Fall ist die Funktion vollständig, im zweiten bis auf eine additive Konstante bestimmt. In Bezug auf die Ausführung des zweiten Problems ist noch näheres in § 36 gesagt.

§ 15.

Noch eine Reihe anderer Schlüsse, welche mit dem vorigen allgemeinen Satze in naher Verwandtschaft stehen, lässt sich aus der Integralformel V) herleiten. Es sei für das Innere und zugleich für das Äussere einer Kurve eine Funktion u dargestellt durch die Formeln:

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_i}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n} T_i d\sigma,$$

$$u_a = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_a}{\partial N} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N} T_a d\sigma.$$

Der Grenzwert von u_i und u_a ist auf dem Rande der gleiche nämlich U. In dieser Darstellung erscheint jede der Potentialfunktionen als Summe aus einem Potentiale mit einfacher Belegung und einem Potentiale mit Doppelbelegung. Setzt man

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad u_a = u_a^{(1)} + u_a^{(2)},$$

so ist

$$U_i^{(1)} = U_a^{(2)} = \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} P, \quad U_i^{(2)} = U_a^{(1)} = \frac{1}{2} U - \frac{1}{2} P.$$

Hieraus folgt also, dass $u_i^{(1)}$ dasselbe Potential für das innere Gebiet ist wie $u_a^{(2)}$ für das äussere, also ein Potential mit der einfachen Belegung $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial N}$, und ebenso dass $u_a^{(1)}$ dasselbe Potential für das äussere Gebiet ist, wie $u_i^{(2)}$ für das innere, also ein Potential mit der einfachen Belegung $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial n}$. Der Beweis dieser Behauptung folgt aus den Sätzen über die eindeutige Bestimmtheit einer Potentialfunktion, wenn die Werte am Rande einer Fläche und das Verhalten im Unendlichen bekannt sind, welche im folgenden Kapitel ausführlich besprochen werden.

In diesen Relationen ist also eine Regel enthalten, wie man das Potential einer Doppelbelegung, deren Moment U bekannt ist, in das Potential einer einfachen Belegung zu verwandeln hat; es ist

$$u_i^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_i}{\partial n} d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N} T_i d\sigma,$$

$$u_a^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_a}{\partial N} d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n} T_a d\sigma.$$

Zugleich erkennt man, dass die Beziehung besteht:

$$U_i^{(1)} - U_a^{(1)} = P = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_s \quad \text{und} \quad U_i^{(1)} + U_a^{(1)} = U$$

Das Potential einer Doppelbelegung ändert sich also nicht stetig, wenn man durch den Rand, auf welchem die Belegung sich befindet, hindurch geht (§ 10).

Ferner bestehen für irgend ein Bogenstück des Randes die Integralgleichungen des Paragraphen 11:

$$\int\left(\frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n}\right) d\sigma = 2\pi M_1 = -\int\frac{\partial U}{\partial N}d\sigma,$$

$$\int\left(\frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial n}\right) d\sigma = 2\pi M_1 = -\int\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma.$$

Führt man auf der rechten Seite die Werte

$$\frac{\partial U}{\partial N} = \frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial N} + \frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial N} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial n}$$

ein, so ergeben beide Gleichungen die Relation

$$\int\left(\frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n}\right) d\sigma = 0 \quad \text{oder} \int\left(\frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial N} - \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

Dies ist die Beziehung, welche zwischen den Ableitungen nach den Normalen für die äusseren und inneren Werte des Potentiales einer Doppelbelegung besteht, und zwar auf irgend einem Teile des belegten Randes.

Nehmen wir aber an, dass die Funktion U so beschaffen ist, dass die Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial n}$ und $\frac{\partial U}{\partial N}$ längs des Randes stetige Funktionen sind, deren Differentialquotienten gebildet nach dem Bogenelement $d\sigma$ ebenfalls bestimmte endliche Werte haben, so treten die spezielleren Gleichungen des Paragraphen 9 auch in Kraft; es ist

$$\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial N} = \frac{\partial U}{\partial N} = \frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial N} + \frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial N},$$

$$\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial n} + \frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial N} = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial n}$$

und hieraus folgt die Relation

$$\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial N},$$

die man auch in der Form schreiben kann:

$$\frac{\partial (U+P)}{\partial n} = \frac{\partial (U-P)}{\partial N}.*$$

Bildet man aber die Ableitungen in den Randpunkten nach einer beliebigen Richtung x, und ist der Winkel zwischen dieser Richtung und der inneren Normalen (nx), so wird (§ 9):

$$\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial N} \cos(nx) = \left(\frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial N} + \frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial N}\right) \cos(nx),$$

$$\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(nx) = \left(\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial n}\right) \cos(nx),$$

oder wenn man die zweite Gleichung subtrahiert:

$$\left(\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial N} - \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial n}\right) \cos(nx).$$

Bezeichnet y die zu x senkrechte Richtung, so ist

$$\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial n} \cos(nx) + \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \sigma} \cos(ny)$$

und

$$\frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial N} \cos(nx) + \frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial \sigma} \cos(ny),$$

also wird

$$\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial x} = \cos(ny)\left(\frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial \sigma} + \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \sigma}\right) = \cos(ny)\frac{\partial U}{\partial \sigma},$$

und dies ist die allgemeine Relation für die Ableitungen der Potentiale einer Doppelbelegung, vorausgesetzt, dass diese Ableitungen längs des Randes den oben angenommenen Bedingungen genügen.

§ 16.

Die allgemeine Gleichung (V) zur Darstellung von u lässt sich durch Einführung der konjugierten Funktion transformieren. Man bezeichnet v als konjugierte Funktion zu u, wenn die Bedingungen bestehen:

---

* Für einen Kreis ist der Randwert P konstant. Mit Hilfe der Sätze im § 27 folgt hieraus: Ist für einen Kreis mit dem Radius a eine Potentialfunktion im Innern definiert, welche die Randwerte U hat, und ebenso ein Potential für das äussere Gebiet mit denselben Randwerten, so besteht die Relation

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial N} - \frac{1}{2\pi a l(a)} \int U d\vartheta.$$

Ist $a = 1$, so muss $\int U d\vartheta = 0$ sein, wenn das äussere Potential im Unendlichen den Wert null hat.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

oder in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Ist die Funktion u für eine einfach zusammenhängende Fläche gegeben, so ist die Funktion v bis auf eine additive Konstante bestimmt. Das Integral

$$v = \int\limits_{x_0 y_0}^{x,y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x,y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right)$$

bekommt den nämlichen Wert, auf welchem Wege dasselbe auch vom Punkte $x_0 y_0$ bis x, y geführt wird. Konstruiert man nämlich zwei beliebige Wege, so setzen diese eine geschlossene Kurve zusammen. Bezeichnet n die Richtungen der nach dem geschlossenen Raum dieser Kurve gezogenen Normalen, so wird

$$dy = -\cos(nx)\, d\sigma, \quad dx = \cos(ny)\, d\sigma.$$

Führt man das Integral auf dem einen Wege von $x_0 y_0$ nach x, y und alsdann auf dem andern Wege zurück, so ist für diesen geschlossenen Weg

$$\int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = -\int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

also sind die Werte der Integrale, welche von $x_0 y_0$ nach x, y führen, einander gleich.

Zu den in den §§ 2—4 dargestellten allgemeinen Funktionen lassen sich die konjugierten leicht angeben:

Ist für einen Kreis

$$u = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)\, r^k,$$

so ist die konjugierte Funktion bis auf eine additive Konstante

$$v = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-b_k \cos k\vartheta + a_k \sin k\vartheta)\, r^k.$$

Ist für den Sektor

$$u = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k\, r^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin k\frac{\pi}{\alpha}\vartheta,$$

so ist ebenso

$$v = -\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} \cos k \frac{\pi}{\alpha} \vartheta,$$

und betrachten wir die partikuläre Funktion

$$u = a_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\alpha}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^n \frac{\sin n(\alpha - \vartheta)}{\sin n\alpha},$$

so ist die konjugierte, bis auf eine additive Konstante:

$$v = \frac{a_0}{\alpha} l(r) + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^n \frac{\cos n(\alpha - \vartheta)}{\sin n\alpha}.$$

Betrachten wir aber allgemeiner die partikuläre Funktion

$$u = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sin \frac{k\pi}{\alpha} \vartheta \left\{ \int_r^{r_1} U_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \frac{d\varrho}{\varrho} + \int_0^r U_1 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \frac{d\varrho}{\varrho} \right\},$$

so ist die konjugierte:

$$v = \frac{1}{\alpha} \int^r U_1 \frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{k=\infty} \cos \frac{k\pi}{\alpha} \vartheta \left\{ \int_r^{r_1} U_1 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \frac{d\varrho}{\varrho} - \int_0^r U_1 \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \frac{d\varrho}{\varrho} \right\}.$$

Für die im § 4 angegebene allgemeine Funktion in einem Rechteck ist die konjugierte:

$$v = \frac{4}{a} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{q^k}{1 - q^{2k}} \mathfrak{Cos}(k'y) \cos(k'x) \int_0^a U_2 \sin k'x \, dx$$

$$- \frac{4}{a} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{q^k}{1 - q^{2k}} \mathfrak{Cos}\, k'(b - y) \cos k'x \int_0^a U_1 \sin k'x \, dx.$$

§ 17.

Längs des Randes bestehen zwischen den konjugierten Funktionen die Relationen:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(ny) = \frac{\partial V}{\partial y} \cos(nx) - \frac{\partial V}{\partial x} \cos(ny) = -\frac{\partial V}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(ny) - \frac{\partial U}{\partial y} \cos(nx) = \frac{\partial V}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(nx) = \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Mithin ist

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V}{\partial \sigma} T d\sigma$$

und

$$v = \frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial \sigma} T d\sigma.$$

Es ist aber, wenn U und V stetige Funktionen auf dem Rande sind,

$$\int \frac{\partial V}{\partial \sigma} T d\sigma = -\int V \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial U}{\partial \sigma} T d\sigma = -\int U \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma,$$

also

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma,$$

$$v = \frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Mit Einführung der imaginären Einheit i wird

$$u + iv = \frac{1}{2\pi}\int (U + iV)\left(\frac{\partial T}{\partial n} + i \frac{\partial T}{\partial \sigma}\right) d\sigma.$$

Da nun $T = l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$, wenn ϱ die Entfernung eines innerhalb der Kurve σ gelegenen Punktes von den Punkten des Randes angiebt, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial n} + i \frac{\partial T}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial n} + i \frac{\partial \varrho}{\partial \sigma}\right) = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} - i \frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)\big(\cos(nx) + i\cos(ny)\big).$$

Wird die komplexe Koordinate eines Punktes des Randes mit $z = x + iy$, die komplexe Koordinate des inneren Punktes mit $t = a + ib$ bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} - i \frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) = \frac{(x-a) - i(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{1}{(x-a) + i(y-b)} = \frac{1}{z-t}$$

und

$$-\big(\cos(nx) + i\cos(ny)\big) d\sigma = dy - idx = -i(dx + idy).$$

Sonach wird

$$u + iv = \frac{1}{2\pi i}\int (U + iV)\frac{dz}{z-t}.$$

Durch dieses von Cauchy zuerst aufgestellte Integral wird der Wert der komplexen Funktion $u + iv$ für einen innerhalb der Kurve σ gelegenen Punkt t vermittelst komplexer Integration längs des Randes ausgedrückt. Dasselbe ist hier bewiesen unter der Voraussetzung, dass die Funktionen U und V nebst ihren ersten Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial \sigma}$ und $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ auch bis in die Punkte des Randes stetig bleiben.

Zwischen den Randwerten U und V selbst aber besteht eine Relation. Denn setzt man

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma, \quad u_2 = -\frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma,$$

so sind

$$v_1 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma, \quad v_2 = \frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma$$

bezüglich zu u_1 und u_2 konjugiert. Nun gilt, wie früher gefunden, die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int U_2 \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U_1}{\partial n} T d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_1}{\partial \sigma} T d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int V_1 \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Ist also P die Funktion, welche U zugeordnet ist, und ebenso Q die Funktion, welche V zugeordnet ist, so wird

$$U_2 = \frac{1}{2} U - \frac{1}{2} P, \quad V_1 = \frac{1}{2} V - \frac{1}{2} Q,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int (U - P) \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int (V - Q) \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Da nun aber auch zwischen den Funktionen v_2 und v_1 die Relation besteht:

$$\frac{1}{2\pi}\int V_1 \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_2}{\partial n} T d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U_2}{\partial \sigma} T d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int U_2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma,$$

so ist auch

$$\frac{1}{2\pi}\int (U - P) \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int (V - Q) \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma.$$

Für den Kreis gehen diese Gleichungen über in

$$\frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta = -\frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int V d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Die zu einer Funktion u konjugierte Funktion v lässt sich demnach auf dem Kreise bis auf eine beliebige Konstante darstellen durch die Gleichung

$$v = \frac{1}{\pi}\int V \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Dieses Integral wird durch teilweise Integration

$$v = \frac{1}{\pi}\int \frac{\partial U}{\partial \sigma} T d\sigma,$$

falls U stetig und die Ableitung $\frac{\partial U}{\partial \sigma}$ endlich und integrierbar ist. Da dieser Ausdruck ein Potential ist, welches stetig bleibt auch bis in die Punkte des Randes (§ 9), so erhält man den Satz: Sind die Werte einer harmonischen Funktion auf der Peripherie des Kreises stetig und die Ableitung längs der Peripherie endlich und integrierbar, so ist auch die konjugierte Funktion in allen Punkten des Kreises stetig.*

Führt man die Reihe ein:

$$T = l\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\varrho}{r}\cos(\vartheta - \eta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cos 2(\vartheta - \eta) \ldots,$$

wobei $\varrho < r$ die Entfernung eines inneren festen Punktes ϱ, η vom Mittelpunkt angiebt, und r, ϑ die Polarkoordinaten der Peripheriepunkte sind, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{r} + \frac{\varrho}{r^2}\cos(\vartheta - \eta) + \frac{\varrho^2}{r^3}\cos 2(\vartheta - \eta) + \ldots,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} = \quad - \frac{\varrho}{r^2}\sin(\vartheta - \eta) - \frac{\varrho^2}{r^3}\sin 2(\vartheta - \eta) - \ldots,$$

also folgt aus der ersten der obigen Gleichungen:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \int U \cos k(\vartheta - \eta)\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \int V \sin k(\vartheta - \eta)\, d\vartheta.$$

Da die Koeffizienten der Grössen $\cos k\eta$ und $\sin k\eta$ auf beiden Seiten übereinstimmen müssen, so ist für $k = 1, 2, 3 \ldots$

$$\int U \cos k\vartheta\, d\vartheta = \int V \sin k\vartheta\, d\vartheta, \quad \int U \sin k\vartheta\, d\vartheta = -\int V \cos k\vartheta\, d\vartheta.$$

Die diesen analogen Relationen lauten im allgemeinen Fall, wenn die Randkurve auf ein Polarkoordinatensystem bezogen ist, also r eine Funktion von ϑ ist, wobei $\varrho < r$ angenommen wird:

$$\int (U - P)\frac{\partial l\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = -\int (V - Q)\, dl\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\int (V - Q)\frac{\partial l\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = \int (U - P)\, dl\left(\frac{1}{r}\right),$$

---

* Dieser Satz überträgt sich auf alle Flächen, wenn die konforme Abbildung von Teilen derselben auf einen Kreis nachgewiesen ist.

$$\int (U-P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos k\vartheta}{kr^k}\right)d\sigma = -\int (V-Q)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\cos k\vartheta}{kr^k}\right)d\sigma,$$

$$\int (U-P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\sin k\vartheta}{kr^k}\right)d\sigma = -\int (V-Q)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\sin k\vartheta}{kr^k}\right)d\sigma.^*$$

§ 18.

Durch jeden innerhalb eines Gebietes gelegenen Punkt, in welchem eine harmonische Funktion einen bestimmten Wert hat, wir wollen, was keine Einschränkung ist, für das folgende den Wert null annehmen, geht in einer bestimmten Richtung oder in mehreren bestimmten Richtungen eine Kurve, auf welcher sie den nämlichen Wert besitzt. Denn macht man den Punkt zum Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems, so besteht die Entwickelung

$$u(\varrho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \varrho^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta).$$

Auf einem beliebig kleinen Kreise liegen, wenn $\varrho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$ das Anfangsglied der Entwicklung ist, $2n$ Punkte, in denen $u = 0$ wird. Diese Punkte sind so gelegen, dass für dieselben

$$a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$$

beliebig klein oder allgemein tang $n\vartheta$ nahezu gleich $-\frac{a_n}{b_n}$ wird. In der Umgebung dieser Werte nämlich, für welche

$$\operatorname{tang} n\vartheta = -\frac{a_n}{b_n}$$

ist und durch welche die Kreisperipherie in $2n$ gleiche Teile zerlegt wird, müssen Nullpunkte liegen, weil beim Durchschreiten dieser Umgebungen Wechsel in dem Vorzeichen der stetigen Funktion u eintreten, und es kann in jeder dieser Umgebungen nur ein Nullpunkt gelegen sein, weil sonst Maximal- und Minimalwerte von u in diesen Umgebungen sich befinden müssten. Diese Werte aber gehören zu Stellen, an denen

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \sum_{k=1}^{k=\infty} k\varrho^k (-a_k \sin k\vartheta + b_k \cos k\vartheta) = 0$$

wird. Diese Verschwindungswerte liegen in den Umgebungen der Richtungen tang $n\vartheta = \frac{b_n}{a_n}$, welche die von den vorigen gebildeten Winkel

---

* Den Inhalt dieses Paragraphen mit der Umkehr der in ihm enthaltenen Sätze habe ich ausführlicher behandelt in den „Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1885“.

halbieren. Hieraus folgt überdies, was späterhin benutzt wird, dass in der unmittelbaren Umgebung des betrachteten Punktes keine weiteren Stellen liegen, an denen $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial u}{\partial r}$ zugleich null sind.

Die in der Umgebung eines Punktes, wo $u = 0$ ist, gelegenen Stellen, an denen u den Wert null behält, bilden stetige Kurven, die in n beliebig schmale, vom Punkte ausgehende Winkelflächen eingeschlossen werden können, deren Mittelrichtungen einen beliebig kleinen, den Punkt umschliessenden Kreis in $2n$ gleiche Teile teilen. Überschreitet man solch eine Kurve, so ändert sich das Vorzeichen von u.

Jede Linie, längs welcher die Funktion den Wert null hat, trennt also in bestimmter Richtung ein Gebiet, in welchem die Funktion zunächst positive Werte besitzt, von einem Gebiete, in welchem sie negative Werte hat. Erst wenn wiederum der Schnittpunkt der Kurve mit einer anderen Nulllinie überschritten wird, kann sich das Vorzeichen auf den verschiedenen Seiten der ersteren ändern.

Punkte, durch welche nur eine Tangente der Kurve $u = C$ hindurchgeht, sind gewöhnliche Punkte, Punkte, in denen mehr als eine Tangente vorhanden ist, heissen Knoten- oder Gleichgewichtspunkte $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn n Tangenten durch dieselben gehen. Die Linie $u = C$ ist die Niveau- oder Gleichgewichtslinie.

Die Anzahl der Knotenpunkte, welche überhaupt in einem begrenzten Gebiet gelegen sind, ist eine endliche; sie lässt sich durch ein bestimmtes Integral angeben. Denn in solchen Punkten müssen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$, oder $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ gleichzeitig verschwinden, und zwar in einem Knotenpunkt $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung auch von der Ordnung $n - 1$. Die Funktion

$$w = l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = l\,(u_1^{\,2} + u_2^{\,2})$$

ist eine reguläre harmonische Funktion, mit Ausnahme der Knotenpunkte, in denen sie unendlich wird. Umgiebt man jeden der Knotenpunkte mit einem beliebig kleinen Kreise, so ist nach einem früheren Satze

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial w}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

wenn dieses Integral auf dem Rande des Gebietes und auf den Kreisen geführt wird. Der Wert des Integrals auf jedem Kreise ist leicht angebbar. Ist der Mittelpunkt ein Knotenpunkt $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, so wird

$$u(\varrho, \vartheta) = a_0 + \varrho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) + \ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = n \varrho^{n-1} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) + \ldots,$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = n \varrho^{n-1} (- a_n \sin n\vartheta + b_n \cos n\vartheta) + \ldots$$

Berücksichtigt man nur die ersten Glieder der Entwicklung, da die übrigen für $\varrho = 0$ keinen Beitrag zum Integral liefern, so wird

$$l(u_1^2 + u_2^2) = l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2\right] = l\,[n^2 \varrho^{2n-2}(a_n^2 + b_n^2)],$$

also

$$\frac{\partial\, l(u_1^2 + u_2^2)}{\partial \varrho} = \frac{2n-2}{\varrho}.$$

Mithin ist

$$-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial}{\partial \varrho}\, l(u_1^2 + u_2^2)\, \varrho\, d\vartheta = -(n-1),$$

also dem Betrage nach gleich der Ordnung des Knotenpunktes. Folglich stellt das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial}{\partial n}\, l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma,$$

geführt längs der Begrenzung eines gegebenen Gebietes die gesamte Anzahl der im Innern befindlichen Knotenpunkte dar, wenn jeder Punkt mit seiner Ordnungszahl gezählt ist. Dabei ist angenommen, dass die Begrenzungskurve so gelegt ist, dass auf ihr sich kein Knotenpunkt befindet.

§ 19.

Bei einer Potentialfunktion, die im Innern einer gegebenen Fläche nur positive (oder nur negative) Werte besitzt, lässt sich aus dem Wert der Funktion an einer einzigen Stelle ein Schluss ziehen auf die Werte an allen andern Stellen.

Wir betrachten zunächst einen Kreis vom Radius r. Der Wert der Funktion im Mittelpunkt dieses Kreises sei bekannt gleich

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int U\, d\vartheta,$$

so ist für jeden andern Punkt des Kreises:

$$u = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int U\, d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\cos(ln)}{l}\, r\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int U\, d\vartheta,$$

wenn man mit l die Entfernung des betreffenden Punktes von den Peripheriepunkten, mit (ln) den Winkel zwischen den inneren Normalen

der Peripherie und der Strecke l (diese in der Richtung vom Peripheriepunkt zum innern Punkt) bezeichnet. Da nun die Funktion U ihr Zeichen nicht wechseln soll, so folgt nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$u = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(ln)}{l}r\right]\int U\,d\vartheta - u_0 = u_0\left(2r\left[\frac{\cos(ln)}{l}\right] - 1\right),$$

wobei $\left[\frac{\cos(ln)}{l}\right]$ einen mittleren Wert von $\frac{\cos(ln)}{l}$ bei allen möglichen Werten von ϑ bedeutet. Dieser Wert ist immer positiv und endlich, solange der betrachtete Punkt im Innern des Kreises liegt. Denn es ist, wenn der betreffende Punkt in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkt liegt:

$$\varrho^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos(ln), \quad \text{also} \quad r\frac{\cos(ln)}{l} = \frac{r^2 + l^2 - \varrho^2}{2l^2}.$$

Die grössten und kleinsten Werte dieses Quotienten gehören zu den extremen Werten von l. Der kleinste Wert tritt ein für $l = r + \varrho$ und ist gleich $\frac{r}{r+\varrho}$, der grösste tritt ein für $l = r - \varrho$ und ist gleich $\frac{r}{r-\varrho}$. Mithin ist die Grösse der Werte u auf dem inneren Kreise mit dem Radius ϱ eingeschlossen zwischen den Grenzen:

$$u_0\frac{r+\varrho}{r-\varrho} \quad \text{und} \quad u_0\frac{r-\varrho}{r+\varrho}.$$

Ist nun für eine beliebige Fläche der Wert der Funktion u an einer einzigen Stelle bekannt gleich u_0, so ist, vorausgesetzt dass die Funktion überall das gleiche Zeichen hat, ihr Wert auf jedem den Punkt umschliessenden Kreise gleich dem Produkt von u_0 mit einer endlich bleibenden Grösse. Da nun jeder Punkt im Innern des Kreises zum Mittelpunkt einer neuen Integraldarstellung gemacht werden kann, so ist für alle Punkte im Innern der Fläche der Wert der Funktion gleich dem Produkte von u_0 mit einer Grösse, die jedenfalls zwischen endlichen, von u_0 unabhängigen Grenzen eingeschlossen werden kann.

Dieser einfache Satz ist für das folgende deshalb von Bedeutung, weil er lehrt, dass die Funktion u, falls sie überall dasselbe Zeichen hat, gleichmässig für alle Punkte im Innern der Fläche nach null konvergiert, sobald sie in einem einzigen Punkte beliebig klein wird.

Dasselbe gilt auch für alle Ableitungen der Funktion u. Denn im Innern des Kreises mit dem Radius r bestehen für jeden Punkt mit den Koordinaten ϱ, ϑ die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{1}{\pi r}\sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-1}\left[\cos k\vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta + \sin k\vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} U \sin k\vartheta\, d\vartheta\right],$$

$$\frac{\partial u}{\varrho\,\partial \vartheta} = \frac{1}{\pi r}\sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-1}\left[-\sin k\vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} U\cos k\vartheta\, d\vartheta + \cos k\vartheta \int_{-\pi}^{+\pi} U \sin k\vartheta\, d\vartheta\right].$$

Da nun die Integrale ihrem Betrage nach nicht grösser sind als der Betrag von

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U\, d\vartheta = 2u_0,$$

weil U überall einerlei Zeichen hat, so sind auch die Beträge von $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ und $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ an jeder Stelle im Kreise gleich dem Produkte von u_0 mit endlichen Grössen. Sie konvergieren folglich überall im Innern der Fläche gleichmässig nach null, wenn u_0 beliebig klein wird. Ebenso verhalten sich alle höheren Ableitungen.

Wir wollen hieran zwei ähnliche Sätze knüpfen, die sich aber nur auf die Fläche eines Kreises beziehen.

Es sei g der grösste Betrag, welchen die Funktion $u(\varrho, \vartheta)$ auf der Peripherie eines Kreises vom Radius r besitzt. Es ist

$$u(\varrho, \vartheta) - u(0) = \frac{1}{\pi}\int U\left(\frac{\cos(ln)}{l}r - 1\right)d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int U\left((d\sigma)_x - (d\sigma)_0\right),$$

wenn mit $(d\sigma)_x$ und $(d\sigma)_0$ die Winkel bezeichnet werden, unter welchen das Bogenelement $d\sigma$ bezüglich von den Punkten $(x = \varrho, \vartheta)$ und dem Mittelpunkt 0 erscheint. Bezeichnet man die Winkel, welche die von diesen Punkten an das Bogenelement gezogenen Radienvektoren mit dem durch die Punkte x und 0 gelegten Radius bilden, durch ϑ_1 und ϑ_0, so ist $(d\sigma)_x = d\vartheta_1$, $(d\sigma)_0 = d\vartheta_0$, also wird

$$u(\varrho, \vartheta) - u(0) = \frac{1}{\pi}\int U(d\vartheta_1 - d\vartheta_0).$$

Nennt man ferner den Winkel an der Spitze des von den Punkten $0, x$ und dem Punkte σ auf der Peripherie gebildeten Dreieckes α, so ist

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = \alpha, \qquad d\vartheta_1 - d\vartheta_0 = d\alpha, \qquad \text{solange } \vartheta_0 \leqq \pi$$

und

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = -\alpha, \quad d\vartheta_1 - d\vartheta_0 = -d\alpha, \quad \text{solange } \vartheta_0 \geqq \pi;$$

also wird

$$u(\varrho, \vartheta) - u(0) = \frac{1}{\pi}\int U d\alpha \text{ in der ersten Hälfte}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int U d\alpha \text{ in der zweiten Hälfte.}$$

Durchläuft nun ϑ_0 und ebenso ϑ_1 alle Werte von 0 bis 2π, so ist α eine zunächst wachsende Grösse, die aber für $\vartheta_0 = 0$ und $\vartheta_0 = \pi$ den Wert null erhält. Es bekommt α zweimal einen Maximalwert, der aus der Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{\varrho \sin\vartheta_0}{l} = \frac{\varrho \sin\vartheta_0}{\sqrt{r^2 - 2r\varrho\cos\vartheta_0 + \varrho^2}}$$

zu bestimmen ist. Derselbe gehört zu dem Werte $\cos\vartheta_0 = \frac{\varrho}{r}$, für welchen $\sin\alpha = \frac{\varrho}{r}$ wird. Also ist der Maximalwert von $\alpha = \arcsin\frac{\varrho}{r}$, und sonach folgt der Satz:

Ist auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r der grösste Betrag der Potentialfunktion G, so ist der Betrag des Unterschiedes zwischen dem Werte im Mittelpunkt und in irgend einem andern Punkt, dessen Entfernung von der Mitte ϱ beträgt $[u(\varrho, \vartheta) - u(0)]$, höchstens gleich $\frac{4}{\pi} G \arcsin\frac{\varrho}{r}$*.

Ist G der algebraisch grösste Wert, K der kleinste auf der Peripherie r, also $G - K$ die Schwankung der Funktion, und bildet man die harmonische Funktion $v = u - \frac{G+K}{2}$, so ist der grösste Betrag von v auf der Peripherie $\frac{G-K}{2}$. Also wird

$$\text{abs}[v(\varrho, \vartheta) - v(0)] = \text{abs}[u(\varrho, \vartheta) - u(0)] \leq (G - K)\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\varrho}{r}.$$

Ist also D die grösste Schwankung der Funktion auf der Peripherie des Kreises, so ist die Differenz zwischen den Werten im Mittelpunkt und in irgend einem Punkt (ϱ, ϑ) dem Betrage nach höchstens gleich

$$D \cdot \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\varrho}{r},$$

und daraus folgt, dass der Betrag der Differenz zwischen zwei Werten, die zu den Punkten mit den Abständen ϱ und ϱ_1 von der Mitte gehören, höchstens gleich ist

$$D\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{\varrho}{r} + \arcsin\frac{\varrho_1}{r}\right).$$

---

* Schwarz, Journal f. Math. B. 74 S. 232.

Für zwei Punkte, die auf dem nämlichen Kreise mit dem Radius ϱ liegen, ist der Betrag dieser Differenz höchstens gleich

$$D\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{\varrho}{r}\cdot$$

Statt dieser Grenze lässt sich indessen noch eine kleinere angeben*. Liegen die beiden Punkte auf einem konzentrischen Kreise mit dem Radius ϱ, so wird $[u(\varrho, \vartheta_2) - u(\varrho, \vartheta_1)] < \frac{4}{\pi} D \operatorname{arctang}\frac{\varrho}{r}\cdot$ Der Beweis ergiebt sich ebenso wie oben, indem man den Winkel α einführt, den die von den beiden Punkten an ein Bogenelement ausgehenden Radienvektoren miteinander bilden. Dieser Winkel wird am grössten, wenn sein Scheitel in der Halbierungslinie der durch die beiden Punkte gezogenen Sehne liegt, und erhält, wenn die beiden Punkte diametral auf dem Kreise mit dem Radius ϱ liegen, den grösstmöglichen Wert $\alpha = 2 \operatorname{arctang}\frac{\varrho}{r}\cdot$

Hat nun insbesondere die Funktion u im Mittelpunkt den Wert null, so kann der grösste Betrag, welchen sie auf der Peripherie des Kreises ϱ annimmt, nicht grösser sein, als die Schwankung, welchen sie auf diesem Kreise besitzt. Hieraus folgt: Ist für eine Funktion, welche im Mittelpunkt den Wert null hat, die Schwankung auf der Peripherie des Kreises gleich D, so ist auf einem inneren Kreis mit dem Radius ϱ der Betrag der Funktion höchstens gleich $\frac{4}{\pi} D \operatorname{arctang}\frac{\varrho}{r}\cdot$

Da die Grösse $\frac{4}{\pi}\operatorname{arctang}\frac{\varrho}{r} = k$ kleiner ist als 1, wenn $\varrho < r$, so ist für jeden inneren Kreis der Betrag der Funktion kleiner als kD, wobei k von dem Werte D vollkommen unabhängig, einen echten Bruch bezeichnet.

§ 20.

Es sei nun für irgend eine Fläche F eine unendliche Reihe von harmonischen Funktionen gegeben: $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ Die Werte am Rande, in welchen jede derselben stetig übergehen soll, seien bezüglich mit $U_1, U_2, \ldots U_n \ldots$ bezeichnet. Unter dem stetigen Übergang ist, wie schon in § 10 erwähnt wurde, folgendes zu verstehen: Bei jeder vorgeschriebenen beliebig kleinen Zahl δ muss sich zu jedem Randpunkt s ein Gebiet von endlicher Ausdehnung angeben lassen,

* Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. S. 413.

welches in das Innere der Fläche eintritt, und zum Teil von einem Bogenstück der Randkurve, in welchem der Punkt s liegt, begrenzt ist, sodass die Werte der Funktion u_i, welche zu den Punkten dieses Gebietes und seiner Grenzlinien gehören, untereinander um weniger als δ differieren. Man sieht, dass dieses nur dann möglich ist, wenn auch die Funktion U_i an der Stelle s stetig ist.

Man kann solch einen Übergang auch einen gleichmässig stetigen nennen, weil sich zeigen lässt, dass die obige Bedingung, falls sie besteht, auch immer so erfüllt werden kann, dass man das zu einem Punkt s gehörige Gebiet als Stück einer Kreisfläche mit einem Radius ϱ herstellt, wobei ϱ für alle Randpunkte s den nämlichen Wert hat.

Konvergiert nun die Summe der Randwerte

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$$

gleichmässig, so konvergiert auch die Reihe

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

für jeden Punkt im Innern der Fläche und stellt eine im Innern harmonische Funktion dar.

Denn die Funktion ist erstlich in der Fläche stetig, weil die unendliche Reihe gleichmässig konvergiert. Da nämlich die Summe

$$U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+m}$$

zufolge der Voraussetzung für alle Randpunkte zugleich, lediglich durch Wahl von n und unabhängig von m, ihrem Betrage nach kleiner als eine beliebig kleine Zahl δ gemacht werden kann, so wird auch die Summe

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}$$

dem Betrage nach für alle Punkte der Fläche kleiner als δ. Die Reihe für u konvergiert also gleichmässig. Setzt man ferner

$$u = s_n + r_n, \quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1},$$

so ist für jeden Punkt im Innern eines innerhalb der Fläche gelegenen Kreises mit dem Radius ϱ:

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int S_n \frac{\cos(ln)}{l}\,\varrho\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int S_n\, d\vartheta,$$

wenn man mit S_n den Wert der Summe s_n in den Punkten der Peripherie bezeichnet. Nennt man ferner V und R_n die Werte von u und r_n auf der Peripherie, so kann man diese Gleichungen auch in der Form schreiben:

$$u - r_n = \frac{1}{\pi}\int V \frac{\cos(ln)}{l} \varrho\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int V d\vartheta$$

$$- \frac{1}{\pi}\left[\int R_n \frac{\cos(ln)}{l} \varrho\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int R_n d\vartheta\right].$$

Da nun r_n und R_n durch Wahl von n gleichmässig beliebig klein werden, so ist

$$u = \frac{1}{\pi}\int V \frac{\cos(ln)}{l} \varrho\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int V d\vartheta,$$

d. h. u ist eine harmonische Funktion für das ganze Innere der Fläche. Diese Funktion konvergiert auch stetig in die Randwerte U. Man wähle n so gross, dass für alle Punkte des Randes der Wert von

$$U^{(n)} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{n-1}$$

um weniger als $\frac{\delta}{3}$ von den Werten $U^{(n+m)}$ also auch U differiert. Die harmonische Funktion u unterscheidet sich alsdann von der harmonischen Funktion $u^{(n)} = u_1 + u_2 + \ldots u_{n-1}$ um eine Grösse, deren Betrag nicht grösser ist, als der grösste Betrag von $U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+m}$, der, wie gross auch m ist, kleiner bleibt als $\frac{\delta}{3}\cdot$ Betrachtet man nun einen bestimmten Randpunkt s und konstruiert man um denselben einen Bereich, so dass daselbst die Werte von $u^{(n)}$ um weniger als $\frac{\delta}{3}$ voneinander und also auch von dem Werte $U_s^{(n)}$ differieren, so unterscheiden sich auch die Werte u von diesem Werte $U_s^{(n)}$ um weniger als die Grösse $\frac{2\delta}{3}\cdot$ Da nun der Unterschied von $U_s^{(n)}$ und U_s kleiner ist als $\frac{\delta}{3}$, so unterscheiden sich in dem konstruierten Bereich die Werte von u um weniger als δ von dem Werte U_s, und zugleich um weniger als δ voneinander.

Aus diesem Satze und dem des vorhergehenden Paragraphen folgt noch ein bemerkenswerter Lehrsatz, der später wiederholt Anwendung findet:

Ist für eine beliebige Fläche F eine unbegrenzte Reihe von harmonischen Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ gegeben, die alle innerhalb der Fläche einerlei Zeichen haben, und konvergiert die Summe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

an irgend einer Stelle im Innern der Fläche, so konvergiert sie auch für alle inneren Punkte der Fläche, und ist in derselben eine harmonische Funktion.

Wenn nämlich die Reihe an einer Stelle konvergiert, so lässt sich für diese ein Wert n angeben, sodass

$$u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+m}$$

bei jedem Wert von m kleiner bleibt als eine vorgeschriebene beliebig kleine Grösse δ. Dann aber ist diese Summe im Innern der Fläche allenthalben gleich dem Produkt von δ mit einer endlich bleibenden Grösse. Demselben Satz können wir auch folgende Form geben:

Gehen die Werte einer harmonischen Funktion u' beständig wachsend in die Werte einer (endlich bleibenden) Funktion u über, so ist auch u eine harmonische Funktion.

Zweites Kapitel.

Die zur Bestimmung einer Potentialfunktion ausreichenden Bedingungen: Die Eigenschaften der Greenschen Funktion und der natürlichen Belegung.

---

§ 21.

Wenn bei einer harmonischen Funktion u längs einer im Innern des Gebietes gelegenen, noch so kleinen Linie die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ null sind, so ist die Funktion u überall gleich null.

Eine jede Linie, längs welcher $u = 0$ ist, muss, wie im § 18 bewiesen wurde, Gebiete, in denen u zunächst nur positiv ist, von Gebieten, in denen u zunächst nur negativ ist, trennen, ausser wenn u überhaupt gleich null ist. Man wird also auf der gegebenen Linie ein endliches Stück ausschneiden und durch ein endliches Gebiet einschliessen können, sodass auf der einen Seite des Stückes die Werte von u nur positiv (oder null), auf der andern nur negativ (oder null) sind. Man wähle nun einen beliebigen Punkt auf der negativen Seite zum Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius ϱ, dessen Peripherie teilweise auf der anderen Seite liegt, und also zusammen mit dem Kurvenstück ein bestimmtes Gebiet begrenzt, für welches die Werte von u nur positiv (oder null) sein können. Bezeichnet man den Logarithmus der reziproken Entfernung des Mittelpunktes von den Randpunkten dieses bestimmten Gebietes mit T_a, so ist

$$\int \left(u \frac{\partial T_a}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} T_a \right) d\sigma = 0.$$

Da nun aber u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs der Kurve gleich null sind, so reduziert sich dieses Integral auf den Kreisbogen und es ist

$$\int u \frac{\partial l\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial n} d\sigma - l\left(\frac{1}{\varrho}\right) \int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Da nun $\int \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0$ ist, wenn es längs der ganzen Umgrenzung des Gebietes geführt wird, und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs der gegebenen Linie null ist, so wird dieses Integral auch längs des Kreisbogens gleich null, und sonach ist auch

$$\int u \frac{\partial l\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\, d\sigma = \int u\, d\vartheta = 0.$$

Diese Gleichung ist nicht erfüllbar, wenn u durchaus positiv ist; folglich ist u auf dem Kreisbogen und sonach im ganzen Gebiet null.

Hieraus folgt: Wenn der Wert von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs einer, übrigens beliebig kleinen Linie im Innern eines Gebietes gegeben ist, so ist u dadurch in allen Teilen des Gebietes bestimmt.

§ 22.

Wir betrachten nun eine im Endlichen geschlossene, ebene Fläche. Dieselbe kann von einer oder von mehreren Kurven begrenzt, also einfach oder mehrfach zusammenhängend sein. Sind die Werte, welche eine im Innern dieser Fläche harmonische Funktion längs der Randkurven besitzen soll, vorgeschrieben, und bilden dieselben eine stetige Funktion auf dem Rande, so dass auch die harmonische Funktion stetig in diese Randwerte übergeht, so ist die Funktion für alle Punkte im Innern bestimmt. Denn gäbe es zwei Funktionen, welche dieser Forderung Genüge leisten, so würde ihre Differenz eine harmonische Funktion sein, die stetig nach den Randwerten null konvergiert. Solch eine Funktion hat aber im Gebiet überall den Wert null (§ 13).

Sind die Werte der Ableitung $\frac{\partial U}{\partial n}$ am Rande vorgeschrieben, so gehört zu denselben eine eindeutige, harmonische Funktion im Innern des Gebietes nur dann, wenn

$$\int \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = 0$$

ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Funktion bis auf eine additive Konstante bestimmt. Denn aus der Gleichung

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int U \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma$$

folgt, dass bei einer Funktion, für welche $\frac{\partial U}{\partial n}$ längs des Randes null

ist, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ überall im Innern verschwinden; solch eine Funktion ist nur eine Konstante.

Aus derselben Integralformel folgt auch: Sind auf einem Teile des Randes die Werte von U, auf einem andern die Werte von $\frac{\partial U}{\partial n}$ vorgeschrieben, so ist die Potentialfunktion, vorausgesetzt, dass es überhaupt eine giebt, bestimmt.

§ 23.

Um eine harmonische Funktion aus ihren Randwerten für das Innere einer geschlossenen Fläche F wirklich zu bilden, und sonach die Existenz derselben zu erweisen, muss eine Funktion betrachtet werden, welche für die Potentialtheorie im Raum zuerst von Green, in der Ebene zuerst von C. Neumann eingeführt wurde, und von letzterem die Greensche Funktion genannt worden ist. Wir definieren dieselbe zunächst wiederum für die geschlossene ebene Fläche, die eine oder mehrere Randkurven besitzen, also einfach oder mehrfach zusammenhängend sein kann.

Im Innern der Fläche sei ein beliebiger Punkt 0 fixiert; die Entfernungen der Randpunkte vom Punkte 0 seien mit ϱ bezeichnet. Man konstruiere die harmonische Funktion g, die im ganzen Innern der Fläche regulär ist, und am Rande die Werte $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ besitzt. Dass es jedenfalls nur eine Funktion dieser Art giebt, ist im vorigen Paragraphen gezeigt; dass aber solch eine Funktion auch möglich ist, also existiert, soll in einem späteren Paragraphen genau bewiesen werden. Vorläufig nehmen wir ihre Existenz an und nennen sie die zum Punkte 0 gehörige Greensche Funktion. (Von Riemann u. a. wird auch $g - l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ die Greensche Funktion genannt. Vorläufig ist es aber bequemer mit g allein zu operieren und einen einfachen Namen dafür zu haben.) Der Punkt 0 heisst der Pol derselben.

Ist m der kleinste Wert unter den positiven Grössen ϱ, und M der grösste, so sind $l\left(\frac{1}{M}\right)$ und $l\left(\frac{1}{m}\right)$ bezüglich die algebraisch kleinsten und grössten Werte, welche die Greensche Funktion überhaupt im Innern und am Rande der Fläche annimmt. Umgiebt man den Punkt 0 mit einem beliebig kleinen Kreise, so ist die Differenz zwischen der Greenschen Funktion g und der Funktion $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ ausser-

halb des Kreises und im Innern der Fläche überall harmonisch. Da diese Differenz auf dem Rande der Fläche gleich null und auf der Peripherie des beliebig kleinen Kreises negativ beliebig gross wird, so ist $g - l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ im Innern der Fläche überall negativ, also $g < l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$.

Die Funktion g besitzt zwei wesentliche Eigenschaften:

1. Ist g_0 die zu einem Punkt 0 gehörige Greensche Funktion, und ist $g_{0'}$ die zu einem andern Punkt $0'$ gehörige, so ist der Wert, welchen die erste Funktion im Punkte $0'$ besitzt, gleich dem Wert, welchen die zweite Funktion im Punkte 0 hat, also in Formeln:

$$g_0(0') = g_{0'}(0).$$

Man umschliesse die innerhalb der Fläche gelegenen Punkte 0 und $0'$ mit beliebig kleinen Kreisen, deren Mittelpunkte 0 und $0'$ sind, und deren Radien ϱ und ϱ' heissen mögen. Nach Ausschluss dieser Kreise soll die Fläche mit F' bezeichnet werden. Führt man die Funktionen

$$u = g_0 - l\left(\frac{1}{r}\right), \quad u' = g_{0'} - l\left(\frac{1}{r'}\right)$$

ein, wobei r und r' die Entfernungen der Punkte von F' bezüglich von 0 und $0'$ angeben, so sind u und u' im Innern von F' harmonische Funktionen.

Wir betrachten nun das Doppelintegral

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

welches wir über die ganze Fläche F' erstrecken wollen. Um aber keine Voraussetzungen einzuführen über die Werte der Ableitungen an dem Rande, zumal da dieselben in Punkten desselben in der That unendlich werden können, ersetzen wir die Randkurve durch eine andere, welche in beliebiger Nähe derselben verläuft, und ebenfalls die um 0 und $0'$ konstruierten Kreise einschliesst. Als solch eine Kurve lässt sich zweckmässig diejenige wählen, auf welcher u den konstanten Wert α hat, wobei α schliesslich gleich null wird. Wir können nun auch $u - \alpha = v$ einführen und das Integral

$$\iint \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y}\right) dx\, dy$$

im Innern der Fläche betrachten, deren Rand von der Linie $v = 0$ und den beiden Kreisen um 0 und $0'$ gebildet wird. Es ist nun

$$\int dy \int \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x}\, dx = \int dy \left[v\frac{\partial u'}{\partial x}\right] - \int dy \int v \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\, dx,$$

$$\int dx \int \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y}\, dy = \int dx \left[v\frac{\partial u'}{\partial y}\right] - \int dx \int v \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\, dy.$$

Da nun $\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 0$, so wird das Doppelintegral gleich

$$\int dy \left[v \frac{\partial u'}{\partial x} \right] + dx \left[v \frac{\partial u'}{\partial y} \right].$$

Die Werte unter dem Integral beziehen sich nur noch auf den Rand der Fläche F' und da im übrigen $v = 0$ ist, so kommen nur noch die Peripheriepunkte der beiden Kreise in Betracht.

Für die Parallelen zur x-Achse ist, wenn n die nach aussen gerichtete Normale des Kreises bedeutet, an den Austrittsstellen $dy = d\sigma \cos(nx)$, an den Eintrittsstellen $dy = -d\sigma \cos(nx)$, und ebenso für die Parallelen zur y-Achse beim Austritt $dx = d\sigma \cos(ny)$, beim Eintritt $dx = -d\sigma \cos ny$. Mithin ist das obige Integral gleich

$$-\int v\, d\sigma \left\{ \frac{\partial u'}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial u'}{\partial y} \cos ny \right\} = -\int v \frac{\partial u'}{\partial n} d\sigma,$$

da die Eintrittsstellen am Kreise im obigen Integrale mit positivem, die Austrittsstellen mit negativem Zeichen behaftet sind. Es ist nun längs des Kreises mit dem Radius ϱ':

$$\frac{\partial u'}{\partial n} = \frac{\partial g_{0'}}{\partial n} + \frac{1}{\varrho'},$$

also:

$$-\int v \frac{\partial u'}{\partial n} \varrho\, d\vartheta - \int v \frac{\partial u'}{\partial n} \varrho'\, d\vartheta = -\int v \frac{\partial u'}{\partial n} \varrho\, d\vartheta - \int v \frac{\partial g_{0'}}{\partial n} \varrho'\, d\vartheta - \int v\, d\vartheta.$$

Lässt man ϱ und ϱ' beliebig klein werden, so konvergieren die ersten beiden Integrale nach null, das dritte bekommt den Wert

$$-2\pi v = -2\pi(u - \alpha) = -2\pi \left[g_0(0') - l\left(\frac{1}{00'}\right) - \alpha \right],$$

und lässt man α nach null konvergieren, so wird

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) dx\, dy = -2\pi \left[g_0(0') - l\left(\frac{1}{00'}\right) \right].$$

Da nun aber das Doppelintegral symmetrisch in Bezug auf u und u' ist, so folgt, dass man durch die nämliche Betrachtung, wobei die Kurve $u' = \alpha$ eingeführt wird, zu der Gleichung gelangt:

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y} \right) dx\, dy = -2\pi \left[g_{0'}(0) - l\left(\frac{1}{00'}\right) \right].$$

Es ist also

$$g_{0'}(0) = g_0(0').$$

Dass nämlich jenes Doppelintegral, ausgedehnt über die Fläche F', einen bestimmten Wert hat, der unabhängig ist von der Art, wie man schliesslich zur Randkurve übergeht, folgt daraus,

dass man dasselbe als ein Aggregat von Integralen darstellen kann, deren Elemente alle positiv sind; es ist nämlich gleich

$$\frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial(u+u')}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(u+u')}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

$$-\frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy-\frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

und jedes dieser Integrale hat, wenn die Punkte 0 und 0′ ausgeschlossen sind, einen bestimmten Grenzwert.

2. Rückt der Punkt 0′ auf den Rand der Fläche in einen Punkt p, so geht die zum Punkte 0′ gehörige Greensche Funktion in die Funktion $l\left(\frac{1}{r'}\right)$ über, wobei r' die Entfernungen der Punkte in der Fläche vom Punkte p bedeutet. Dieser Übergang erfolgt, nach Ausschluss des Punktes p durch ein beliebig kleines Gebiet, gleichmässig stetig.

Man betrachte gleichzeitig einen festen Punkt 0 und den variabelen Punkt 0′. Um den Punkt 0 konstruiere man die Kurven, auf welchen die Greensche Funktion g_0 gleich $l\left(\frac{1}{r}\right)+\alpha$ oder $g_0-l\left(\frac{1}{r}\right)$ konstant gleich α ist, wobei α einen negativen Wert mit beliebig kleinem Betrag bedeutet. Rückt der Punkt 0′ auf diese Kurve, so hat die zu 0′ gehörige Greensche Funktion $g_{0'}$ im Punkt 0 den Wert $l\left(\frac{1}{00'}\right)+\alpha$. Umgiebt man den Randpunkt p, in welchen 0′ hineinrücken soll, mit einem beliebig kleinen, ins Innere der Fläche F eindringenden Gebiete, welches den Punkt 0′ einschliesst, und nennt man F nach Ausschluss dieses Gebietes F', so ist $g_{0'}-l\left(\frac{1}{r'}\right)$ eine in F' überall harmonische Funktion; r' bezeichnet die variabele Entfernung jedes Punktes im Innern oder am Rande der Fläche F' vom Punkte 0′. Diese harmonische Funktion ist im Punkte 0 gleich α, am Rande von F' überall negativ oder null, und folglich ist $g_{0'}-l\left(\frac{1}{r'}\right)$ überall im Innern von F' gleich dem Produkt von α mit endlichen Grössen (§ 19). Konvergiert α nach null, so geht $g_{0'}$ innerhalb F' gleichmässig in den Wert $l\left(\frac{1}{r'}\right)$ über.

Man kann diesen Satz auch folgendermassen aussprechen: Wird irgend eine Kurve betrachtet, die ganz im Innern der Fläche F liegt, so konvergieren die Werte, welche die Funktion $g_{0'}$ auf der Peripherie und im Innern dieser Kurve besitzt, gleichmässig nach den Werten

$l\left(\frac{1}{r'}\right)$, wenn $0'$ auf den Rand der Fläche F rückt. Ebenso konvergieren auch sämtliche Ableitungen der Funktion g gleichmässig nach den Werten der entsprechenden Ableitungen von $l\left(\frac{1}{r'}\right)$ (§ 19).

§ 24.

Mit Hilfe der Greenschen Funktion kann man eine Potentialfunktion, die für eine im Endlichen geschlossene Fläche definiert ist, lediglich durch die Werte ausdrücken, welche die Funktion am Rande besitzt, also an Stelle der Gleichung Va) des § 12 eine wichtige neue Formel einführen. Wir wollen diese Formel zunächst nur bilden, und sie erst in einem späteren Kapitel exakt beweisen, da auch die Existenz der Greenschen Funktion erst noch bewiesen werden muss.

Die für das Innere der Fläche F definierte Potentialfunktion lässt sich durch die Randwerte U und $\frac{\partial U}{\partial n}$ vermittelst der Gleichungen darstellen:

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_i}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n}\, T_i\, d\sigma.$$

Man konstruiere nun die zu einem inneren Punkt i gehörige Greensche Funktion g_i, so besteht auf jeder Kurve σ', die ein Gebiet im Innern von F umschliesst, die Gleichung

$$\int \left(U \frac{\partial G_i}{\partial n} - G_i \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma' = 0,$$

wenn U und G_i die Werte von u und g_i auf der Kurve σ' bedeuten. Geht man von σ' zur ursprünglichen Randkurve selbst über, so ist

$$\lim_{\sigma'=\sigma} \int U \frac{\partial G_i}{\partial n}\, d\sigma' = \lim_{\sigma'=\sigma} \int G_i \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma'.$$

Da nun aber die Werte von G_i gleich den Werten von T_i werden, wenn der Rand σ' in den Rand σ übergeht, so ist

$$\lim_{\sigma'=\sigma} \int G_i \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma' = \int \frac{\partial U}{\partial n}\, T_i\, d\sigma;$$

also verwandelt sich die obige Formel in die Gleichung:

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_i}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma'=\sigma} \int U \frac{\partial G_i}{\partial n}\, d\sigma'.$$

Die Zulässigkeit der vollzogenen Grenzübergänge muss festgestellt werden. Man sieht aber ein, dass sie (die Existenz der Funktion g_i

vorausgesetzt) jedenfalls statthaft ist, wenn die Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial n}$ auch beim Übergang in die Randkurve 0 stetig bleiben, wenn also z. B. diese Randkurve noch nicht die natürliche Begrenzung der Potentialfunktion u bildet.

§ 25.

Als Beispiele für die Darstellung der Greenschen Funktion wollen wir nur kurz auf den Kreis und das Rechteck hinweisen.

Ist der Radius des Kreises a, und sind r und ϑ die Polarkoordinaten eines im Innern des Kreises gelegenen Punktes, so kann jede im Innern des Kreises harmonische Funktion durch die Reihe dargestellt werden:

$$u(r, \vartheta) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta).$$

Sind c, ϑ_1 die Koordinaten eines inneren Punktes, der zum Pol der Greenschen Funktion gemacht werden soll, so muss die Funktion u für $r = a$ übergehen in den Wert $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$, wobei ϱ die Entfernung der Peripheriepunkte vom Punkte c, ϑ_1 bedeutet. Bezeichnet man die komplexen Koordinaten der Randpunkte mit $z = ae^{i\vartheta}$, die komplexe Koordinate des Poles mit $\gamma = ce^{i\vartheta_1}$, so ist

$$l\left(\frac{1}{\varrho}\right) = -\,l(\varrho) = -\,\text{Reell}\; l(z-\gamma) = -\,l(a) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{c}{a}\right)^k \cos k(\vartheta_1 - \vartheta),$$

also ist

$$A_0 = -\,l(a), \quad A_k = \frac{1}{k}\left(\frac{c}{a}\right)^k \cos k\vartheta_1, \quad B_k = \frac{1}{k}\left(\frac{c}{a}\right)^k \sin k\vartheta_1,$$

und folglich

$$g = -\,l(a) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{rc}{a^2}\right)^k \cos k(\vartheta_1 - \vartheta).$$

Summiert man die Reihe, so wird

$$g = l(a) - \frac{1}{2}\, l\,[r^2 c^2 - 2\,a^2 r c \cos(\vartheta_1 - \vartheta) + a^4].$$

In dieser Form tritt die Symmetrie hervor in Bezug auf die Punkte r, ϑ und c, ϑ_1. Für $r = 0$ wird $g = l\left(\frac{1}{a}\right)$, für den Mittelpunkt als Pol ist daher auch g konstant gleich $l\left(\frac{1}{a}\right)$.

Bestimmt man auf dem Radius, welcher vom Mittelpunkt 0 zum Pol C führt, den konjugierten Punkt D, dessen Koordinaten $\frac{a^2}{c}$ und ϑ_1 sind, so erkennt man, dass für einen beliebigen Punkt P

$$g = l\left(\frac{a}{c\,.\,PD}\right)$$

ist. Man ersieht hieraus, dass die natürliche Begrenzung für die Greensche Funktion im Endlichen nur durch den konjugierten Punkt D bezeichnet wird.

§ 26.

Für ein Rechteck ist die harmonische Funktion, welche auf den Seiten $y = b$ den Wert U_2 hat, auf den drei übrigen Seiten den Wert null, durch die Reihe definiert:

$$u = \frac{4}{a}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{q^k}{1-q^{2k}}\,\mathfrak{Sin}\left(k\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(k\frac{\pi}{a}x\right)\int_0^a U_2\sin\left(k\frac{\pi}{a}x\right)dx.$$

Setzt man hier $U_2 = -\frac{1}{2}\,l\left((x-\alpha)^2+(b-\beta)^2\right)$ und bildet man ebenso die drei auf die übrigen Seiten bezüglichen Reihen (§ 4), indem man für die Randfunktionen die entsprechenden Logarithmen einsetzt, so erhält man die Greensche Funktion g. Die Ausführung der Integrale wird indessen kompliziert.

Einfacher und wichtiger ist folgende Unterlegung: Die harmonische Funktion, welche auf der Seite $y = b$ den Wert U_2, auf den andern Seiten den Wert null hat, muss nach den vorläufigen Untersuchungen im § 24 auch in der Form darstellbar sein:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^a U_2\left(\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)dx,$$

wobei die Ableitung in der Richtung der negativen Ordinatenachse zu bilden ist. Bezeichnet man mit α, β die Koordinaten des Pols der Greenschen Funktion und vergleicht man diesen Ausdruck mit dem obigen (in welchem α, β an Stelle von x, y zu schreiben ist), so kann man schliessen, dass für $y = b$ die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{8\pi}{a}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{q^k}{1-q^{2k}}\,\mathfrak{Sin}\left(k\frac{\pi}{a}\beta\right)\sin\left(k\frac{\pi}{a}\alpha\right)\sin\left(k\frac{\pi}{a}x\right).$$

Da ferner der Wert von $T-g$ für $y = b$ null ist, so ist es leicht, die harmonische Funktion $T-g$ selbst anzugeben, welche längs der

Geraden $y = b$ den Wert null hat, während ihre Ableitung nach der negativen Richtung von y den oben angegebenen Wert besitzt; durch diese Angaben ist nämlich die Funktion bestimmt (§ 21); es wird

$$T - g = -8 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{q^k}{1-q^{2k}} \operatorname{Sin}\left(k\frac{\pi}{a}\beta\right) \sin\left(k\frac{\pi}{a}\alpha\right) \sin\left(k\frac{\pi}{a}x\right) \operatorname{Sin} k\frac{\pi}{a}(y-b).$$

Die Konvergenz dieser Reihe erstreckt sich nicht auf das ganze Rechteck, aber in einer gewissen Umgebung der Geraden $y = b$ ist die Reihe konvergent und stellt die harmonische Funktion dar. Um auf bekannte Reihen zu reduzieren, fügt man die konjugierte Funktion hinzu; bezeichnet man alsdann die Funktion $g - T$ nebst der konjugierten mit $u + iv = w$, so ist

$$w = 8i \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{q^k}{1-q^{2k}} \operatorname{Sin}\left(k\frac{\pi}{a}\beta\right) \sin\left(k\frac{\pi}{a}\alpha\right) \cos k\frac{\pi}{a}\left(x + i(y-b)\right).$$

Setzt man $x + iy = z$, $c = \alpha + i\beta$, $c' = \alpha - i\beta$, so ist $c + c' = 2\alpha$, $c - c' = 2i\beta$, also

$$\begin{aligned}
w &= 8 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{q^k}{1-q^{2k}} \cos k\frac{\pi}{a}(z - ib) \sin\left(k\frac{\pi}{2a}(c-c')\right) \sin\frac{k\pi}{2a}(c+c') \\
&= 4 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{q^k}{1-q^{2k}} \cos k\frac{\pi}{a}(z - ib) \left\{\cos\frac{k\pi}{a}c' - \cos\frac{k\pi}{a}c\right\} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{q^k}{1-q^{2k}} \left[\cos\frac{k\pi}{a}(z - ib - c') + \cos\frac{k\pi}{a}(z - ib + c')\right. \\
&\qquad \left. - \cos\frac{k\pi}{a}(z - ib - c) - \cos\frac{k\pi}{a}(z - ib + c)\right].
\end{aligned}$$

Führt man die Jacobische Funktion ein:

$$\vartheta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2n\pi z),$$

so ist $l\left(\vartheta\left(\frac{z}{\pi}\right)\right)$ bis auf eine Konstante gleich

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{q^k}{1-q^{2k}} \cos(2kz),$$

und sonach wird z, wenn man noch $\frac{b}{a} i = \tau$ setzt:

$$c^w = \frac{\vartheta\left(\frac{z-c}{2a} - \frac{\tau}{2}\right) \vartheta\left(\frac{z+c}{2a} - \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{z-c'}{2a} - \frac{\tau}{2}\right) \vartheta\left(\frac{z+c'}{2a} - \frac{\tau}{2}\right)}.$$

Auf die nähere Diskussion dieser Formel, aus deren Konvergenz sich nun rückwärts alle Schlüsse leicht bestätigen lassen, soll hier nicht eingegangen werden. Sie liefert bekanntlich die konforme Abbildung des Rechteckes auf einen Kreis, wobei der Punkt c dem Mittelpunkt des Kreises entspricht (§ 45).

§ 27.

Das Gebiet, für welches eine harmonische Funktion bestimmt werden soll, sei nun ein ins Unendliche erstrecktes, und zwar soll dasselbe, damit der Unendlichkeitspunkt nicht auf dem Rande liegt, von der Aussenfläche einer geschlossenen Kurve S gebildet werden. Die harmonische Funktion kann im Unendlichen ein verschiedenes Verhalten aufweisen; sie kann daselbst nämlich endlich bleiben (ist sie das Potential endlicher Massen, so hat sie dann den Wert null) oder sie kann logarithmisch unendlich werden (wie $Ml\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r = \infty$), oder unendlich werden wie eine algebraische Potenz von bestimmter Ordnung, oder von höherer als jede endliche Ordnung. Ist die Funktion das Potential endlicher Massen, so kann sie nur logarithmisch unendlich werden, daher wird dieser Fall nebst $M = 0$ im folgenden allein für das Unendlichwerden näher berücksichtigt.

Eine harmonische Funktion ist durch die Werte, welche sie am Rande S der Fläche besitzt, nur dann vollständig bestimmt, wenn auch ihr Verhalten im Unendlichen aus diesen Randwerten sich erkennen lässt. Im § 13 ist bewiesen, dass bei einer harmonischen Funktion, welche im Unendlichen den Wert null hat, die Werte auf der Kurve S, falls sie konstant sind, notwendig ebenfalls gleich null sein müssen. Dagegen kann die Funktion auf der Kurve S konstant sein, ohne dass sie überall konstant ist, wenn sie im Unendlichen nicht endlich bleibt, sondern unendlich wird. Demnach ergeben sich folgende Sätze:

1. Soll die harmonische Funktion im Unendlichen in vorgeschriebener Weise unendlich werden, und sind die Werte der Funktion u am Rande S gegeben, so giebt es jedenfalls nicht mehr als eine Funktion, welche dieser Forderung genügt. Denn gäbe es zwei Funktionen, u_1 und u_2, so müsste die Differenz derselben im Unendlichen verschwinden und auf dem Rande S null sein; solch eine Funktion ist im Gebiet überall gleich null.

Nehmen wir insbesondere an, dass die Funktion u im Unendlichen den Wert null haben soll, so können wir den Satz noch genauer

fassen: Weil nämlich die Funktion bereits bestimmt ist, wenn ihre Randwerte auf S gegeben sind, und überdies nur gefordert wird, dass sie im Unendlichen endlich bleibt, so kann der bestimmte Wert im Unendlichen nicht mehr vorgeschrieben werden; es wird vielmehr bei gegebenen Randwerten bereits ein bestimmter endlicher Wert im Unendlichen vorhanden sein, sodass man diese Konstante in Abzug bringen muss, um zu bewirken, dass u im Unendlichen null wird. Also erhält man den Satz:

2. Sind für den Rand S die Werte U gegeben, so giebt es nur eine Funktion u, welche im Unendlichen verschwindet, und deren Randwerte auf S sich von den Werten U um eine additive Konstante unterscheiden.

Derselbe Umstand wird nun im allgemeinen immer eintreten, wenn für die Funktion u die Randwerte U und das Verhalten im Unendlichen $Ml\left(\frac{1}{r}\right)$ gleichzeitig gegeben sind. Die harmonische Funktion, für welche also die Differenz $u - Ml\left(\frac{1}{r}\right)$ im Unendlichen null wird, wird auf dem Rande S Werte besitzen, die sich um eine bestimmte Konstante von U unterscheiden.

Um etwas Näheres über diese Konstante festzustellen, müssen wir eine andere Potentialfunktion γ einführen, die wir wiederum zunächst nur definieren, während ihre Existenz aus den späteren allgemeinen Betrachtungen hervorgehen wird.

Man denke sich für das äussere Gebiet der Kurve S diejenige harmonische Funktion definiert, welche sich im Unendlichen verhält wie $l\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r = \infty$ und auf der Kurve S konstant ist. Man gelangt zu dieser Funktion auf folgendem Wege. Im Innern der Kurve S werde irgend ein Punkt angenommen und zum Anfangspunkt des Polarkoordinatensystems gewählt. Man bilde die Funktion $l\left(\frac{1}{r}\right)$ und bezeichne die Werte derselben am Rande S mit V. Alsdann konstruiere man für das äussere Gebiet von S die harmonische Funktion v, welche im Unendlichen endlich bleibt und am Rande die Werte V hat. Ist dann Γ der bestimmte Wert im Unendlichen, so ist

$$\gamma(x, y) = l\left(\frac{1}{r}\right) - v + \Gamma$$

die gesuchte Funktion; dieselbe hat auf dem Rande S den Wert Γ und wird im Unendlichen wie $l\left(\frac{1}{r}\right)$ unendlich. Der Wert von Γ ist

eine für die gegebene Kurve S charakteristische Konstante, sobald die Längeneinheit fest gewählt ist. Wird diese geändert, so ändert sich der Wert von Γ um eine additive Konstante.

So ist z. B. für einen Kreis vom Radius a die Funktion γ gleich $l\left(\frac{1}{r}\right)$, wenn r die Entfernung vom Mittelpunkt angiebt; also ist $\Gamma = l\left(\frac{1}{a}\right)$; dieser Wert kann negativ, null oder positiv sein, je nachdem a kleiner, gleich oder grösser als 1 ist. Dass in der That bei jeder Kurve der Wert von Γ durch Veränderung der linearen Masseinheit additiv geändert werden kann, folgt daraus, dass der Wert von v additiv geändert wird; denn diese Funktion sollte am Rande die Werte $l\left(\frac{1}{r}\right)$ haben. Die für das Äussere der Kurve S definierte Funktion, deren konstanter Wert am Rande Γ ist, heisst nach Neumann das Potential der natürlichen Belegung. Der Wert von γ in irgend einem äusseren Punkte a ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\gamma_a = \frac{1}{2\pi}\int \Gamma \frac{\partial T_a}{\partial N} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \Gamma}{\partial N} T_a d\sigma,$$

also weil zufolge der Gleichung $\Gamma = \text{const}$ das erste Integral

$$\int \frac{\partial T_a}{\partial N} d\sigma = 0$$

ist,

$$\gamma_a = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \Gamma}{\partial N} T_a d\sigma.$$

Es sei nun eine Potentialfunktion u gegeben; ihre Randwerte auf S seien mit U bezeichnet, die Art des Unendlichwerdens durch $Ml\left(\frac{1}{r}\right)$ fixiert. Es ist dann auch (wenn wir annehmen, dass die Ableitungen nach der Normalen am Rande stetig bleiben) [§ 12, Gleich. Ib]:

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma = M \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma = 1.$$

Nun besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi}\int \left(U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} - \Gamma \frac{\partial U}{\partial N}\right) d\sigma = 0,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \Gamma \int \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma = -\Gamma M.$$

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, dass bei der gegebenen Kurve S die Längeneinheit so gewählt ist, dass Γ nicht null ist. Alsdann lehrt diese Gleichung:

1. Ein Potential, dessen Randwerte U gegeben sind, besitzt im Unendlichen ein ganz bestimmtes Verhalten; es wird logarithmisch unendlich, wie $M l\left(\frac{1}{r}\right)$, wobei

$$M = -\frac{1}{2\pi\Gamma}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma.$$

Man kann M auch als Summe der Massen im Innern von S bezeichnen, durch welche das Potential erzeugt ist.

2. Sind für das Potential Randwerte U und der Wert von M gleichzeitig vorgeschrieben, so ist solch eine Funktion im allgemeinen nicht möglich, vielmehr lässt sich u nur so bilden, dass seine Randwerte um eine bestimmte Konstante C von U abweichen. Die Grösse dieser Konstanten C folgt aus der Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int (U + C) \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma = -\Gamma M \quad \text{also} \quad C = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma + \Gamma M.$$

3. Soll die Funktion auf der Kurve den konstanten Wert C haben, so ist ihr Verhalten im Unendlichen durch den Faktor $M = \frac{C}{\Gamma}$ bestimmt.

4. Soll die Funktion im Unendlichen verschwinden und sich auf dem Rande S nur um eine Konstante vom Werte U unterscheiden, so ist diese Konstante bestimmt durch die Gleichung:

$$C = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma.$$

So ist z. B. für einen Kreis der Wert dieser Konstanten immer gleich:

$$C = -\frac{1}{2\pi}\int U d\vartheta.$$

Es kann nun für dieselbe Kurve die Längeneinheit so gewählt sein, dass $\Gamma = 0$ ist. Alsdann bestehen folgende Sätze:

1. Ein jedes Potential, welches am Rande S die Werte U hat, besitzt die Eigenschaft, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma = 0$$

ist; mag es dabei im Unendlichen null oder logarithmisch unendlich werden. Das Potential ist also durch seine Randwerte U allein nicht bestimmt.

2. Sind irgend welche Werte U am Rande vorgeschrieben, welche dieser Integralbedingung nicht genügen, so sind nur solche Potentiale möglich, deren Randwerte sich um eine additive Konstante von U unterscheiden. Der Wert dieser Konstanten ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi}\int (U + C)\frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma = 0, \quad \text{also} \quad C = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma,$$

er gilt auch, wenn die Funktion im Unendlichen verschwinden soll.

3. Soll die Funktion am Rande konstant sein, so ist nur der konstante Wert null möglich.

§ 28.

Auch für das äussere Gebiet von S können wir mittels der Greenschen Funktion den Wert von u lediglich durch die Werte U am Rande ausdrücken. Wir definieren die Funktion g_a, welche am Rande S die Werte T_a + Konst hat, wobei T_a den Logarithmus der reciproken Entfernung eines äusseren Punktes a von den Punkten auf S darstellt. Die Funktion g_a soll im Unendlichen null werden. Die Konstante, welche die Differenz zwischen g_a und T_a angiebt, ist durch die Formel

$$C_a = \frac{1}{2\pi}\int T_a \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma$$

bestimmt, und folglich nichts anderes als der Wert der Funktion $-\gamma$ im Punkte a. Nun ist

$$u_a = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_a}{\partial N} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N} T_a \, d\sigma$$

und

$$\int \left(U \frac{\partial G_a}{\partial N} - G_a \frac{\partial U}{\partial N}\right) d\sigma' = 0 \quad \text{also} \quad \lim_{\sigma' = \sigma} \int U \frac{\partial G_a}{\partial N} d\sigma' = \int (T_a - \gamma) \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma.$$

Es bedeutet hierbei σ' eine Kurve, welche die Kurve S umschliesst, und schliesslich in S übergehen soll. Mithin wird

$$u_a = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_a}{\partial N} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma' = \sigma} \int \frac{\partial G_a}{\partial N} U \, d\sigma' - \frac{1}{2\pi}\gamma \int \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma.$$

Wenn wir nun weiter annehmen, dass die Funktion u so beschaffen ist, dass für dieselbe

$$\int \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma = 0$$

wird, so ist sie durch ihre Randwerte allein darstellbar; es ist

$$u_a = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_a}{\partial N} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma'=\sigma} \int U \frac{\partial G_a}{\partial N} d\sigma'$$

eine Funktion, welche am Rande den Wert U hat und im Unendlichen verschwindet. Bei dieser Formel für u_a ist bemerkenswert, dass sie nicht geändert wird, wenn an Stelle von U der Wert $U + C$ eingesetzt wird.

Dass nun auch umgekehrt die vorstehende Formel eine harmonische Funktion darstellt, welche am Rande die Werte

$$U + \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma$$

besitzt und im Unendlichen verschwindet, soll später bewiesen werden. (§ 46).

Anmerkung. Da für die Potentialtheorie im Raum die analogen Sätze zum Teil anders lauten, so will ich sie hier ohne Beweis zum Vergleich kurz anführen.

Eine Potentialfunktion, welche für den äusseren Raum einer Fläche regulär sein soll und im Unendlichen verschwindet, ist bestimmt, wenn die Werte auf der Fläche gegeben sind.

Insbesondere giebt es auch Funktionen, welche auf der Fläche konstant sind und im Unendlichen verschwinden. Eine solche Funktion v hat die Eigenschaft, dass ihr Maximal- oder ihr Minimalwert der konstante positive resp. negative Wert auf der Fläche ist, und folglich ist für dieselbe $-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma$ niemals null, sondern eine bestimmte Grösse. Indem man die Funktion v mit einem konstanten Faktor multipliziert, kann man es immer erreichen, dass dieses Integral den Wert 1 bekommt. Diese Funktion γ heisst das Potential der natürlichen Belegung; der konstante Wert auf der Fläche Γ; die Grösse Γ kann niemals null oder negativ sein. Aus der Gleichung

$$\int \left(U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} - \Gamma \frac{\partial U}{\partial N}\right) d\sigma = 0$$

oder

$$\frac{1}{4\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma = \frac{1}{4\pi} \Gamma \int \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma = - M\Gamma$$

folgt nun:

1. Für ein Potential, dessen Werte U auf der Fläche gegeben sind, ist der Wert von $-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma = M = -\frac{1}{4\pi\Gamma}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma$ ein ganz bestimmter.

2. Sind die Werte U auf der Fläche gegeben, und überdies der Wert von $-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N} d\sigma = M$ vorgeschrieben, so lässt sich ein Potential bestimmen, dessen Werte auf der Fläche nur um eine additive Konstante von U abweichen. Diese Konstante ist

$$C = \frac{1}{4\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma + \Gamma M.$$

3. Soll die Funktion auf der Fläche den konstanten Wert C haben, so ist für dieselbe

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial U}{\partial N}\,d\sigma=\frac{C}{\Gamma}.$$

4. Soll für die Funktion u das Integral $\int\frac{\partial U}{\partial N}\,d\sigma=0$ sein, und sollen sich die Werte auf der Fläche nur um eine additive Konstante von gegebenen Werten U unterscheiden, so ist diese Konstante bestimmt durch die Gleichung

$$C=\frac{1}{4\pi}\int U\frac{\partial \Gamma}{\partial N}\,d\sigma.$$

Führt man die Greensche Funktion ein, welche auf der Fläche die Werte T_a hat, wobei T_a die reciproke Entfernung der Flächenpunkte von einem äusseren Punkt a darstellt und welche im Unendlichen null ist, so bestehen die Gleichungen:

$$u_a=\frac{1}{4\pi}\int U\frac{\partial T_a}{\partial N}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial U}{\partial N}\,T_a\,d\sigma,$$

$$\int\left(U\frac{\partial G_a}{\partial N}-G_a\frac{\partial U}{\partial N}\right)d\sigma'=0\quad\text{also}\quad\lim_{\sigma'=\sigma}\int U\frac{\partial G_a}{\partial N}\,d\sigma'=\int\frac{\partial U}{\partial N}\,T_a\,d\sigma.$$

Mithin wird

$$u_a=\frac{1}{4\pi}\int U\frac{\partial T_a}{\partial n}\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\lim_{\sigma'=\sigma}\int U\frac{\partial G_a}{\partial N}\,d\sigma,$$

diejenige Potentialfunktion, welche auf der Fläche den Wert U hat und für welche $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial U}{\partial N}\,d\sigma=\frac{1}{4\pi\Gamma}\int U\frac{\partial\Gamma}{\partial N}\,d\sigma$ ist.

Drittes Kapitel.

Die Neumannsche Methode zur Konstruktion einer Potentialfunktion aus ihren Randwerten.

---

§ 29.

Die Aufgabe, die Existenz einer Potentialfunktion nachzuweisen, für welche die Werte U, die sie am Rande eines einfach zusammenhängenden Gebietes besitzt, vorgeschrieben sind, lässt sich, wie Herr C. Neumann gezeigt hat, direkt für solche Flächen lösen, bei denen die Tangenten der Randkurve nirgendwo in das Innere der Fläche eintreten. Solche Flächen sind also alle diejenigen, bei denen die begrenzende Kurve, wie z. B. bei einem Kreise, einer Ellipse etc. — überall konvex nach aussen ist; ferner diejenigen, welche aus Stücken von solchen Linien oder aus Geraden zusammengesetzt sind, falls keine einspringenden Ecken vorkommen.

Wir betrachten im folgenden derartige Flächen, und nehmen dabei an, dass die Randkurve überall eine bestimmte Tangentenrichtung besitzt, und nur in den Eckpunkten, die aber stets nur in endlicher Anzahl vorhanden sein sollen, zwei verschiedene, jedoch bestimmte Tangenten hat. Wendungen der Randkurve sowie Spitzen sind durch die Forderung, dass die Tangente niemals in das Innere der Fläche eintreten soll, ausgeschlossen.

Die Randwerte U sollen bis auf weiteres stetig sein. Führt man also etwa eine Längenbestimmung auf der Randkurve ein, so soll U eine stetige Funktion der Länge s sein, wobei diese Länge von irgend einem festen Randpunkt an gerechnet wird. Bei einem vollständigen Umlauf auf dem Rande kehrt dabei U in seinen Anfangswert zurück. Die harmonische Funktion u, welche für das Innere der Fläche F gesucht wird, soll so beschaffen sein, dass sie überall stetig in die Randwerte U übergeht, in dem Sinne, wie es im § 20 definiert wurde.

Wir bilden nun zunächst die Funktion (§§ 10 und 14)

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n}\, l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_x.$$

Dieselbe stellt eine harmonische Funktion für das Innere der Fläche F dar, welche beim Übergang in den Rand stetig übergeht in den Wert

$$U_1 = U_s + \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_s = U_s + P_s,$$

falls der Punkt s ein regulärer Randpunkt ist, und in den Wert

$$U_1 = \left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U_s + \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_s = \left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U_s + P_s,$$

falls der Punkt s ein Eckpunkt ist mit der Winkelöffnung α auf der innern Seite des Randes. Die Funktion P_s oder deutlicher $P(s)$ ist eine stetige Funktion von s; sie soll die zugeordnete Funktion zu U heissen. Betrachtet man nämlich zunächst eine Stelle, in deren Umgebung der Rand regulär ist, so kann man dieselbe in ein beliebig kleines Stück σ_1 des Randes einschliessen. Man zerlege nun das Integral in zwei Teile

$$P(s) = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_s = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma_1)_s + \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma_2)_s,$$

von denen sich der eine auf den beliebig kleinen Bogen σ_1, der andere auf den übrigen Teil σ_2 des Randes bezieht. Ebenso ist

$$P(s+h) = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma_1)_{s+h} + \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma_2)_{s+h}.$$

Wenn nun der Wert von h beliebig klein wird, so dass der Punkt $s+h$ ebenfalls in dem Bogenstück σ_1 sich befindet, so soll gezeigt werden, dass der Betrag der Differenz $P(s+h) - P(s)$ beliebig klein wird mit h.

Charakteristisch für die behandelte Fläche ist, dass die Grösse $(d\sigma)_x = \frac{\cos(rn)}{r}\,d\sigma$ für keinen Punkt x im Innern der Fläche und auch für keinen Punkt s am Rande der Fläche negativ wird, sondern stets positiv ist, allenfalls null wird; letzteres tritt nur ein bei Randpunkten, die auf geraden Strecken liegen. Es ist demnach

$$\frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma_1)_s = \frac{1}{\pi}\,U_s\int (d\sigma_1)_s \pm \left(< \delta\,\frac{1}{\pi}\int (d\sigma_1)_s\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma_1)_{s+h} = \frac{1}{\pi}\,U_{s+h}\int (d\sigma_1)_{s+h} \pm \left(< \delta\,\frac{1}{\pi}\int (d\sigma_1)_{s+h}\right),$$

wenn man mit δ die grösste Schwankung der Funktion U innerhalb des Bogens σ_1 bezeichnet. Sonach wird der Betrag der Differenz zwischen den Integralen links gleich dem Betrage von

$$\frac{1}{\pi} U_s \left\{ \int (d\sigma_1)_s - \int (d\sigma_1)_{s+h} \right\} - \frac{1}{\pi} (U_{s+h} - U_s) \int (d\sigma_1)_{s+h}$$

bis auf Grössen, die durch Wahl von σ_1 von vornherein beliebig klein gemacht werden können. Da auch die Differenz $U_{s+h} - U_s$ durch Verkleinerung von h beliebig klein wird, so ist nur noch die Differenz $\int (d\sigma_1)_s - \int (d\sigma_1)_{s+h}$ zu betrachten. Jedes dieser Integrale stellt einen Winkel dar, oder genauer gesagt, die Summe zweier Winkel. Konstruiert man im Punkte s die Tangente, und die von s an die Endpunkte des Bogens σ_1 ausgehenden Sekanten, so ist $\int (d\sigma_1)_s$ gleich der Summe der beiden Winkel, welche von den Sekanten und der Tangente gebildet werden. Ebenso ist $\int (d\sigma_1)_{s+h}$ gleich der Summe der beiden Winkel, welche von der Tangente im Punkte $s + h$ und den beiden an die Endpunkte des Bogens σ_1 von $s + h$ ausgehenden Sekanten eingeschlossen werden.

Da die Tangente sich stetig ändert, so gehen diese Winkel stetig in die vorigen über, wenn h nach null konvergiert, d. h. der Wert

$$\frac{1}{\pi} U_s \left\{ \int (d\sigma_1)_s - \int (d\sigma_1)_{s+h} \right\}$$

wird mit h dem Betrage nach beliebig klein. Dasselbe gilt aber auch für die Differenz

$$\frac{1}{\pi} \int U \, (d\sigma_2)_{s+h} - \frac{1}{\pi} \int U \, (d\sigma_2)_s,$$

da längs des Bogens σ_2 der Wert $\dfrac{\cos(rn)}{r}$ eine überall endliche und stetige Funktion der Werte s ist.

Ist aber der Punkt s ein Eckpunkt der Kurve mit der Winkelöffnung α, so ist, wenn wir wiederum den beliebig kleinen Bogen σ konstruieren, der den Punkt s einschliesst, die Differenz der Werte $P(s)$ und $P(s+h)$ bis auf Grössen, die beliebig klein gemacht werden können, gleich der Differenz

$$\frac{1}{\pi} U_s \left\{ \int (d\sigma_1)_s - \int (d\sigma_1)_{s+h} \right\}.$$

Bezeichnet man mit ε und ε' die Winkel, welche die vom Punkte s ausgehenden Sekanten mit je einer Tangente im Punkte s bilden (und zwar jedesmal mit derjenigen, mit welcher die Sekante zusammenrückt, wenn σ_1 null wird), so konvergiert

$$\int (d\sigma_1)_{s+h},$$

wenn der Punkt $s + h$ in den Punkt s rückt, wobei h innerhalb des Winkels ε liegen möge, nicht nach dem Werte $\varepsilon + \varepsilon'$, sondern nach

dem Werte $\varepsilon + (\varepsilon' + \pi - \alpha)$. Die Funktion P_s ist also in der Umgebung einer Ecke derart unstetig, dass

$$\lim_{h=0} P(s \pm h) = P(s) + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U_s.$$

Dies aber ist eine hebbare Unstetigkeit. Erteilt man der Funktion P an jedem Eckpunkte s mit der Winkelöffnung α den Wert

$$\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U_s = \lim_{h=0} \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_{s \pm h},$$

so ist diese Funktion längs des ganzen Randes überall stetig. Diese Funktion werde fortan kurz mit P bezeichnet.

§ 30.

Die Funktion P besitzt für die Art von Flächen, welche wir hier betrachten, noch eine andere wesentliche Eigenschaft. Da in der Integralformel

$$\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s$$

das Element $(d\sigma)_s$ nicht negativ wird, so ist, wenn wir die obere algebraische Grenze der Werte von U mit G, die untere mit K bezeichnen:

$$\frac{1}{\pi} G \int (d\sigma)_s > P > \frac{1}{\pi} K \int (d\sigma)_s, \quad \text{also} \quad G > P > K,$$

d. h. die algebraisch grössten und kleinsten Werte von P liegen innerhalb der algebraisch grössten und kleinsten Werte von U. Für diese Abnahme der Schwankungen von P im Verhältnis zu den Schwankungen von U lässt sich aber, wie Herr Neumann gezeigt hat, noch ein genaueres Mass angeben, das lediglich von der Gestalt der begrenzenden Kurve abhängt.

Bezeichnet M den mittleren Wert der Funktion U, also den Wert $M = \dfrac{G + K}{2}$, so kann man auf der Randkurve σ alle Teile längs welcher U gleich oder grösser ist als M, von allen Teilen, längs welcher U kleiner ist als M, unterscheiden. Die Elemente der ersteren mögen mit dem gemeinsamen Symbol $d\alpha$, die der anderen mit dem Symbol $d\beta$ bezeichnet werden. Für irgend einen Punkt s (der nicht gerade Eckpunkt ist), ist dann

$$P = \frac{1}{\pi}\int U(d\alpha)_s + \frac{1}{\pi}\int U(d\beta)_s,$$

und daraus folgt:

$$P < \frac{1}{\pi} G \int (d\alpha)_s + \frac{1}{\pi} M \int (d\beta)_s \quad \text{oder} \quad P < M + \frac{1}{\pi} (G - M) \int (d\alpha)_s,$$

$$P > \frac{1}{\pi} M \int (d\alpha)_s + \frac{1}{\pi} K \int (d\beta)_s \quad \text{oder} \quad P > M + \frac{1}{\pi} (K - M) \int (d\beta)_s.$$

Da nun $G - M = \frac{G - K}{2}$ und $M - K = \frac{G - K}{2}$, so ist

$$P < M + \frac{G - K}{2} \frac{1}{\pi} \int (d\alpha)_s,$$

$$P > M - \frac{G - K}{2} \frac{1}{\pi} \int (d\beta)_s.$$

Wir betrachten nun die Werte $P_{(s_1)}$ und $P_{(s_2)}$, welche P an irgend zwei Randstellen s_1 und s_2 erhält, und suchen für den Betrag der Differenz $P_{(s_1)} - P_{(s_2)}$ eine obere Grenze zu fixieren. Die Stellen s_1 und s_2 sollen nicht Eckpunkte sein. Denn wenn sich zeigen lässt, dass der Betrag der Differenz $P_{(s_1)} - P_{(s_2)}$ um einen angebbaren Wert kleiner bleibt als eine bestimmte Grösse, wie nah auch s_1 und s_2 an Eckpunkte rücken, so gilt diese Grenze auch mit Berücksichtigung der Eckpunkte. Es ist nun

$$P_{(s_1)} < M + \frac{G - K}{2} \frac{1}{\pi} \int (d\alpha)_{s_1}, \quad P_{(s_2)} > M - \frac{G - K}{2} \frac{1}{\pi} \int (d\beta)_{s_2},$$

also ist

$$P_{(s_1)} - P_{(s_2)} < \frac{G - K}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int (d\alpha)_{s_1} + \frac{1}{\pi} \int (d\beta)_{s_2} \right\}.$$

Der Wert von

$$\frac{1}{\pi} \int (d\alpha)_{s_1} + \frac{1}{\pi} \int (d\beta)_{s_2} = 2 - \left(\frac{1}{\pi} \int (d\beta)_{s_1} + \frac{1}{\pi} \int (d\alpha)_{s_2} \right)$$

ist aber für unsere Flächen stets um eine bestimmte endliche Grösse kleiner als 2. Denn jedes der Integrale auf der rechten Seite enthält nur positive Elemente; wir müssen also zeigen, dass sie nicht beide zugleich den Wert null haben können.

Wenn das Integral $\int (d\beta)_{s_1}$ null sein soll, so ist das nur möglich, wenn eine gerade Strecke l innerhalb der Begrenzung vorhanden ist, wenn s_1 auf dieser Strecke liegt, und wenn alle Elemente $d\beta$ ebenfalls dieser Strecke angehören. In diesem Falle ist aber $\int (d\alpha)_{s_2}$ sicherlich grösser als null. Denn entweder gehört der Punkt s_2 ebenfalls der Strecke l an, alsdann hat dieses Integral den Wert π, oder der Punkt s_2 liegt ausserhalb der Strecke l; alsdann ist dieses Integral

gleich $\pi - \int (d\beta)_{s_2}$, wobei die Elemente $d\beta$ entweder vollständig die Strecke l überdecken oder Teile auf derselben. Dieser Wert kann nicht null sein, weil eine gerade Strecke, von einem Punkte, der eine endliche Entfernung von ihr hat, nicht unter dem Winkel π erscheinen kann. Auch wenn der Punkt s_2 in einen Endpunkt der Geraden rückt, bleibt der Wert von $\int (d\beta)_{s_2}$ kleiner als π, denn er geht in den Winkel über, welchen die Richtung, mit der der Punkt in den Endpunkt konvergiert, und die Gerade miteinander einschliessen. Auch dieser Winkel kann nicht gleich π werden, weil Spitzen auf dem Rande ausgeschlossen sind.

Sonach ist die grösstmögliche Differenz, welche $P_{(s_1)} - P_{(s_2)}$ erhalten kann, ein Wert, dem wir die Form geben können

$$(G - K)\,\lambda,$$

wobei

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2\pi}\int (d\beta)_{s_1} - \frac{1}{2\pi}\int (d\alpha)_{s_2}$$

ein echter Bruch ist, der nicht den Wert 1 annehmen kann.

Für die weiteren Betrachtungen ist es aber notwendig zu erkennen, dass sich für den Wert von λ wirklich eine obere Grenze kleiner als 1 fixieren lässt, die niemals überschritten wird, wie auch immer die stetige Funktion U beschaffen sein mag, d. h. wie auch immer die Elemente $d\alpha$ und $d\beta$ auf der Kurve verteilt sein mögen.

Da es hierbei nur darauf ankommt, überhaupt eine derartige Grenze zu fixieren, so kann man in sehr einfacher Weise vorgehen. Aus der Randkurve schneide man ein beliebiges Stück (geradlinig oder krummlinig) heraus; dasselbe habe die Länge σ'; seine Elemente seien $d\sigma'$. Es seien zunächst s_1 und s_2 Punkte, von denen keiner auf σ' liegt, von denen vielmehr ein jeder auch von den Endpunkten von σ' noch um eine angebbare Länge entfernt ist. Bezeichnet man mit $d\alpha'$ und $d\beta'$ die Elemente von α und β, welche in σ' sich befinden, so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int (d\beta)_{s_1} + \frac{1}{2\pi}\int (d\alpha)_{s_2} \geqq \frac{1}{2\pi}\int (d\beta')_{s_1} + \frac{1}{2\pi}\int (d\alpha')_{s_2}.$$

Wird nun durch einen Punkt s und ein Element des Randes $d\sigma$ ein Kreis gelegt, so ist der Durchmesser D dieses Kreises bestimmt durch die Gleichung $D\cos(rn) = r$, wenn wie früher r die Entfernung von s bis $d\sigma$ und (rn) den Winkel zwischen dieser Richtung und der Normalen des Elementes $d\sigma$ bezeichnet. Also ist

$$(d\sigma)_s = \frac{d\sigma}{D}.$$

Wenn nun die Punkte s_1 (und s_2) von den Elementen $(d\sigma')$ eine endliche Entfernung haben, und auch nicht in den Richtungen derselben liegen, so kann der Durchmesser D nicht unendlich gross werden, es giebt vielmehr eine obere Grenze $\varDelta'$, die von demselben nicht überschritten wird. Also ist

$$(d\sigma)_s \geqq \frac{d\sigma}{\varDelta'},$$

und folglich wird

$$\frac{1}{2\pi}\int (d\beta')_{s_1} + \frac{1}{2\pi}\int (d\alpha')_{s_2} \geqq \frac{1}{2\pi\varDelta'}\left(\int (d\beta') + \int (d\alpha')\right) = \frac{\sigma'}{2\pi\varDelta'}.$$

Damit ist eine positive obere Grenze gefunden für alle Punktepaare s_1 und s_2, die nicht gerade in σ' und dessen unmittelbarer Umgebung liegen; für dieselben ist

$$\lambda \leqq 1 - \frac{\sigma'}{2\pi\varDelta'}.$$

Soll einer der Punkte s in σ' liegen, so bestimme man einen beliebigen Abschnitt σ'' auf dem Rande, und es ergiebt sich für alle Punktepaare mit Ausnahme solcher, von denen ein Punkt in σ', der andere in σ'' (oder deren unmittelbarer Nähe) sich befindet, eine obere Grenze

$$\lambda \leqq 1 - \frac{\sigma''}{2\pi\varDelta''}$$

und für Punkte s, von denen der eine in σ', der andere in σ'' sich befindet, fixiere man einen beliebigen Bogen σ''', so dass

$$\lambda \leqq 1 - \frac{\sigma'''}{2\pi\varDelta'''}$$

wird. Der grösste Wert unter diesen drei liefert eine obere Grenze kleiner als 1, die niemals von dem Wert λ überschritten wird, von welcher Art auch die stetige Funktion U sein mag.

Dieses Verfahren ist ohne weiteres anwendbar, wenn der Rand der Kurve ein noch so kleines krummliniges Bogenstück enthält; bei einem geradlinigen Polygone dagegen muss eine Strecke σ' mit ihrer Umgebung stets so gewählt werden, dass sie ausser der einen Polygonseite noch die Anfänge der beiden anstossenden Seiten enthält; als Strecke σ' selbst dient dann ein innerer Teil der vollständigen Seite. Denn nur für diejenigen Randpunkte, die ausserhalb dieses Gebietes fallen, wird der Durchmesser des Kreises nicht unendlich gross. Man kann nun leicht an der geometrischen Figur erkennen, dass der oben angegebene Prozess bei einem Polygon mit sechs oder mehr Seiten ohne Schwierigkeit ausführbar ist, denn die Seite 1 mit anliegenden

Stücken der Seiten 2 und 6, die Seite 3 mit anliegenden Stücken von 4 und 2, die Seite 5 mit anliegenden Stücken von 6 und 4 bilden bereits am Sechseck drei auseinanderliegende Gebiete σ', σ'', σ''' nebst ihren Umgebungen.

Aber auch beim Fünfeck lässt sich der Prozess mit einer kleinen Modifikation ausführen*; σ' nebst seiner Umgebung sei die Seite 1 mit zwei angrenzenden Stücken von 2 und 5; σ'' mit seiner Umgebung sei die Seite 3 mit angrenzenden Stücken von 4 und 2. Liegt aber nun der eine Punkt s_1 in σ', der andere in σ'', so teile man das Gebiet σ'' in zwei Teile, I und II, indem man die Seite 3 halbiert; der erste Teil enthält kein Stück der Seite 4, der andere kein Stück der Seite 2. Die Punkte innerhalb σ' und I können nun auf ein Gebiet σ''' bezogen werden, welches von der Seite 4 und angrenzenden Stücken von 3 und 5 gebildet wird; die Punkte innerhalb σ' und II dagegen müssen auf zwei verschiedene Stücke $\sigma^{(4)}$ und $\sigma^{(5)}$ bezogen werden. Teilt man nämlich das Gebiet σ' in zwei Teile, I' und II', indem man die Seite 1 halbiert, so dass I' kein Stück von 5, II' kein Stück von 2 enthält, so lassen sich die Punkte, welche in I' und II fallen, auf ein Gebiet $\sigma^{(4)}$ beziehen, das von der Seite 5 mit angrenzenden Teilen von 1 und 4 gebildet wird, die Punkte, welche in II' und II fallen, auf ein Gebiet $\sigma^{(5)}$, welches von der Seite 2 mit angrenzenden Teilen von 1 und 3 gebildet wird. Unter den fünf verschiedenen Werten, welche sich für λ bei diesem Prozess ergeben, die alle kleiner sind wie 1, liefert der grösste eine obere Grenze.

Für das Dreieck und Viereck dagegen ist diese Überlegung nicht mehr ausreichend, und es bleibt daher fraglich, ob die im folgenden durchgeführte Methode für diese Flächen anwendbar ist.

Für alle Flächen ohne einspringende Tangenten, mit Ausnahme der letztgenannten, ist also der Satz bewiesen: Bezeichnet D die Schwankung einer Funktion U auf dem Rande, also die Grösse $G - K = D$, so ist für die zugeordnete Funktion

$$P = \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma)_x$$

die Schwankung nur noch ein Bruchteil von D, d. h. kleiner als der Wert $D\lambda$, wobei λ ein echter Bruch ist, der von der Beschaffenheit der Funktion U vollkommen unabhängig ist.

---

* Vergl. die inzwischen erschienene neueste Publikation von Herrn C. Neumann: „Über die Methode des arithmetischen Mittels. Erste Abhandlung". Im XIII. Bande der Abhandl. der K. Sächs. Gesellsch. der W. 1887.

§ 31.

Wir haben eine harmonische Funktion u_1 konstruiert, deren Randwerte $U + P$ sind, vermittels des Integrales $u_1 = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_x$. Da die Werte P bekannt sind, so können wir mit dieser stetigen Funktion P in derselben Weise verfahren. Es ist

$$u_2 = \frac{1}{\pi}\int P\,(d\sigma)_x$$

eine harmonische Funktion mit den Randwerten $P + P_1$, wobei P_1 definiert ist durch das Integral

$$P_1 = \frac{1}{\pi}\int P\,(d\sigma)_s$$

und bis auf hebbare Unstetigkeiten eine stetige Funktion von s ist. Die grössten und kleinsten Werte dieser Funktion liegen innerhalb der grössten und kleinsten Werte von P und ihre Differenz ist nicht grösser als $\lambda^2 D$.

Wird dieser Prozess fortgesetzt, also die Reihe der Funktionen eingeführt:

$$P_1 = \frac{1}{\pi}\int P\,(d\sigma)_s,\; P_2 = \frac{1}{\pi}\int P_1\,(d\sigma)_s, \ldots P_n = \frac{1}{\pi}\int P_{n-1}\,(d\sigma)_s, \ldots$$

so stellt die Summe

$$u = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int P\,(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi}\int P_1\,(d\sigma)_x - + \ldots + (-1)^{n-1}\int P_n\,(d\sigma)_x$$

eine harmonische Funktion dar mit den Randwerten:

$$U + (-1)^{n-1} P_{n+1}.$$

Der Betrag der Funktion P_{n+1} ist immer kleiner als der grösste Betrag von U und ihre Schwankungen sind nicht grösser als $D\lambda^{n+2}$.

Da λ ein echter Bruch ist, so konvergiert dieser Wert nach null; d. h. die Werte der Funktion P_n konvergieren mit wachsenden Werten von n nach einer bestimmten Konstante C. Demnach wird die gesuchte harmonische Funktion, welche die Randwerte U besitzen soll, darstellbar sein durch die unendlichen Reihen:

$$u = -C + \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int (P - P_1)(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int (P_2 - P_3)\,(d\sigma)_x - \ldots$$

oder

$$u = C + \frac{1}{\pi}\int (U - P)(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi}\int (P_1 - P_2)\,(d\sigma)_x + \frac{1}{\pi}\int (P_3 - P_4)\,(d\sigma)_x + \ldots$$

Die Konvergenz dieser Reihe ergiebt sich aus dem allgemeinen Satz im § 20. Mögen wir die Reihe in der einen oder der anderen Form betrachten, sie ist eine Summe von harmonischen Funktionen, für welche die Summe der Randwerte gleichmässig und zwar nach dem Werte U konvergiert. Denn bildet man den Rest der Reihe von einer Stelle ab, etwa die Summe

$$-\frac{1}{\pi}\int(P_{2n}-P_{2n+1})(d\sigma)_x-\ldots-\frac{1}{\pi}\int(P_{2n+2m}-P_{2n+2m+1})(d\sigma)_x,$$

so ist die Summe der Randwerte dieser Funktionen gleich

$$-P_{2n}+P_{2n+2m+2}$$

und diese Grösse ist für alle Punkte des Randes durch Wahl von n und unabhängig von m ihrem Betrage nach beliebig klein, weil die Differenz kleiner ist als $D\lambda^{2n+1}$, denn die Funktion $P_{2n+2m+2}$ liegt innerhalb der Werte von P_{2n} und die Schwankungen dieser Werte sind nicht grösser als $D\lambda^{2n+1}$. Aus dieser Eigenschaft der gleichmässigen Konvergenz der Reihe

$$U=-C+(U+P)-(P-P_2)-(P_2-P_4)-\ldots$$

ist, wie im § 20 weiter gezeigt wurde, auch bewiesen, dass die Funktion u stetig in die Randwerte U übergeht.

§ 32.

Die vorstehenden Untersuchungen gelten auch für das äussere Gebiet der nämlichen Kurve. Wird auch hier die Funktion

$$u_1=\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x$$

gebildet, wobei nun $(d\sigma)_x=\frac{\partial}{\partial N}l\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma=\frac{\cos(rN)}{r}d\sigma$ ist, d. h. N die Richtung der Normalen ist, welche in das äussere Gebiet führt, so wird

$$U_1=U+\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s=U+P$$

und dieser Wert von P unterscheidet sich von dem früheren nur dadurch, dass er das entgegengesetzte Zeichen hat. Mithin lassen sich alle Formeln und Beweise der vorigen Paragraphen ohne weiteres auch hier anwenden, und es ist

$$u=-C+\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x-\frac{1}{\pi}\int(P-P_1)(d\sigma)_x-\frac{1}{\pi}\int(P_2-P_3)(d\sigma)_x-\ldots$$

Die Grössen P, P_2, $P_4, \ldots$ und folglich auch $C = \lim P_{2n}$ haben hier die entgegengesetzten Werte wie vorhin. Die Funktion, welche wir konstruiert haben, ist diejenige, welche am Rande die Werte U und im Unendlichen den Wert $-C$ besitzt. Demnach ist (§ 27) der Wert von C gleich $\frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial \Gamma}{\partial N} d\sigma$, wenn mit γ das Potential der natürlichen Belegung bezeichnet wird.

Für die in Rede stehenden Flächen ist die Existenz des Potentials der natürlichen Belegung, sowie die Existenz der Greenschen Funktion für jeden inneren, sowie für jeden äusseren Punkt durch diese Betrachtungen erwiesen.

§ 33.

Wir wollen nun den allgemeineren Fall behandeln, dass bei gleicher Beschaffenheit der Randkurve die Randwerte U nicht mehr stetig sind, sondern, was für spätere Anwendungen vorzugsweise von Bedeutung ist, an einzelnen Stellen sprungweise Unstetigkeiten erleiden. Bei Annäherung an solch eine Stelle s des Randes von der einen oder der anderen Seite auf der Kurve soll also

$$\lim_{h \to 0} U(s+h) \text{ sowohl wie } \lim_{h \to 0} U(s-h)$$

je ein bestimmter Grenzwert sein; aber die beiden Werte sind voneinander verschieden. Zunächst ist zu prüfen, nach welchen Werten die harmonische Funktion

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma)_x$$

konvergiert, wenn u in einen Randpunkt s von dieser Beschaffenheit rückt. Der betreffende Punkt s sei zuerst kein Eckpunkt. Umgiebt man ihn mit einem beliebig kleinen Bogen σ_1 des Randes, und nennt man den übrigen Teil des Randes σ_2, so ist

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma_1)_x + \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma_2)_x.$$

Das zweite Integral konvergiert für $x = s$ nach dem Werte

$$\frac{1}{\pi}\int U (d\sigma_2)_s.$$

Im ersten Integral unterscheide man die beiden Teile σ'_1 und σ''_1, welche zu verschiedenen Seiten von s liegen. Es ist

$$\frac{1}{\pi}\int U (d\sigma_1)_x = \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma'_1)_x + \frac{1}{\pi}\int U (d\sigma''_1)_x.$$

Wird der Grenzwert von U in den Punkten des Bogens σ'_1 mit U', in den Punkten des Bogens σ''_1 mit U'' bezeichnet, so ist diese Summe gleich

$$U'\frac{1}{\pi}\int(d\sigma'_1)_x + U''\frac{1}{\pi}\int(d\sigma''_1)_x \pm \left(<\delta\frac{1}{\pi}\int(d\sigma'_1)_x\right) \pm \left(<\delta\frac{1}{\pi}\int(d\sigma''_1)_x\right).$$

Konvergiert x nach s, so geht $\int(d\sigma'_1)_x$ in den Winkel über, welchen die Richtung, mit der x in den Punkt s einrückt, mit der Sekante bildet, die von s an den anderen Endpunkt des Bogens σ'_1 gezogen ist; desgleichen wird $\int(d\sigma''_1)_x$ der Winkel, den dieselbe Richtung mit der Sekante bildet, die nach dem Endpunkt von σ''_1 führt. Da diese Sekanten nach der Tangente im Punkte s konvergieren, wenn σ'_1 und σ''_1 null werden, so wird, wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, welchen die Richtung (xs) mit der Tangente einschliesst:

$$\lim u_1 = U_1 = \frac{\beta}{\pi}U' + \frac{\pi-\beta}{\pi}U'' + \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s.$$

Der Grenzwert der Funktion u_1 im Randpunkt s ist also vieldeutig; er hängt von der Richtung ab, auf der x in den Punkt s rückt.

Ist aber der Punkt s zugleich ein Eckpunkt mit der Winkelöffnung α, so sind die beiden Winkel nicht supplementär; ist der Winkel, welchen die Richtung mit der einen Tangente bildet β, so wird der Winkel mit den anderen Tangenten $(2\pi - \beta - \alpha)$, also ist

$$\lim u_1 = U_1 = \frac{\beta}{\pi}U' + \frac{2\pi-\beta-\alpha}{\pi}U'' + \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s,$$

oder wenn $\beta = \pi - \gamma$, und $\alpha = \gamma + \delta$ gesetzt wird

$$U_1 = \left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right)U' + \left(1 - \frac{\delta}{\pi}\right)U'' + \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s.$$

Die Funktion $P = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_s$ ist aber, wenn wir wiederum hebbare Unstetigkeiten beseitigen, eine stetige Funktion von s, ausser wenn die Unstetigkeitspunkte zugleich Eckpunkte sind.

Denn betrachtet man die Umgebung einer Stelle s, an der U eine sprungweise Wertänderung von U' zu U'' erleidet, so wird nach dem Verfahren des § 29 die Differenz $P(s+h) - P(s)$ nur wesentlich abhängig von der Grösse

$$\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma_1)_{s+h} - \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma_1)_s,$$

da die übrigen Teile der Differenz mit h beliebig klein werden. Es ist aber

$$\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma_1)_s = \frac{1}{\pi}\, U'\int (d\sigma'_1)_s$$

$$+\frac{1}{\pi}\, U''\int (d\sigma''_1)_s \pm \left(<\delta\, \frac{1}{\pi}\int (d\sigma'_1)_s\right) \pm \left(<\delta\, \frac{1}{\pi}\int (d\sigma''_1)_s\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma_1)_{s+h} = \frac{1}{\pi}\, U'\int (d\sigma'_1)_{s+h} + \frac{1}{\pi}\, U''\int (d\sigma''_1)_{s+h}$$

$$\pm\left(<\delta\, \frac{1}{\pi}\int (d\sigma'_1)_{s+h}\right) \pm \left(<\delta\, \frac{1}{\pi}\int (d\sigma''_1)_{s+h}\right),$$

also wird bis auf Grössen, die von vornherein durch Wahl von σ'_1 und σ''_1 beliebig klein sind, die obige Differenz gleich

$$\frac{1}{\pi}\, U'\left\{\int (d\sigma'_1)_{s+h} - \int (d\sigma'_1)_s\right\} + \frac{1}{\pi}\, U''\left\{\int (d\sigma''_1)_{s+h} - \int (d\sigma''_1)_s\right\},$$

und diese Grösse konvergiert wie früher mit h nach null.

Ist aber der Punkt s zugleich ein Eckpunkt der Kurve, und liegt der Punkt $s+h$ auf derjenigen Seite von s, wo U den Grenzwert U' hat, so wird in dieser letzten Formel

$$\lim_{h=0}\int (d\sigma'_1)_{s+h} = \int (d\sigma'_1)_s,$$

$$\lim_{h=0}\int (d\sigma''_1)_{s+h} = \pi - \alpha + \int (d\sigma''_1)_s;$$

also wird

$$\lim_{h=0}\,(P_{(s+h)} - P_{(s)}) = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U'',$$

wenn der Punkt $s+h$ von der Seite σ'_1 einrückt, und ebenso wird

$$\lim_{h=0}\,(P_{(s+h)} - P_{(s)}) = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U',$$

wenn der Punkt $s+h$ von der Seite σ''_1 einrückt. Diese Unstetigkeit ist nicht mehr hebbar; vielmehr unterscheiden sich die beiden Grenzwerte von P, je nachdem man von der einen oder der anderen Seite zum Punkte s geht, um den Wert

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)(U'' - U').$$

Da die Grösse $\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)$ ein echter Bruch ist bei diesen Flächen ohne einspringende Ecken (positiv für die Innenfläche, negativ für die Aussenfläche), so erkennt man, dass auch die Unstetigkeitssprünge der Funktionen $P, P_1, P_2, \ldots$ in geometrischer Progression abnehmen. Es bleibt demnach auch jetzt noch der Satz bestehen, dass die Reihe

dieser Funktionen nach einer Konstante konvergieren muss. Übrigens wurde auch bei dem Beweise dieses Satzes die Stetigkeit der Funktion U nicht benutzt.

Die Beschaffenheit der Funktion $P_{(s)}$ zu beiden Seiten einer Ecke, an der U unstetig ist, führt aber noch zu einem andern Satze. Wir hatten gesehen, dass die harmonische Funktion

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_x$$

bei Annäherung in die Ecke den Wert erhält

$$\lim u_1 = \left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) U' + \left(1 - \frac{\delta}{\pi}\right) U'' + \frac{1}{\pi}\int U\,(d\sigma)_s;$$

zu beiden Seiten der Ecke hat dieselbe Funktion die Randwerte

$$V_1 = U' + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U'' + P_{(s)}, \quad \text{und} \quad V_2 = U'' + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U' + P_{(s)}.$$

Man kann nun den obigen Wert von $\lim u_1$ auch durch diese beiden Werte darstellen; er erhält alsdann die Form

$$\lim u_1 = \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) V_1 + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) V_2$$

und dies lässt sich als ein allgemeiner Satz so aussprechen: Ist eine harmonische Funktion u_1 in der Form $\frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x$ dargestellt, wobei U eine im allgemeinen stetige Funktion auf dem Rande ist, die nur an einzelnen Stellen, unter denen sich auch Eckpunkte des Randes befinden können, unstetig wird, indem sie eine plötzliche aber bestimmte Wertänderung beim Durchgang durch diese Stellen erleidet, so ist der Grenzwert von u_1 bei Annäherung an solch eine Stelle mit der Winkelöffnung α gleich dem Wert

$$\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) V_1 + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) V_2, \quad \gamma + \delta = \alpha, \quad \alpha \leq \pi,$$

wobei V_1 und V_2 die Grenzwerte der Funktion u_1 zu beiden Seiten der Ecke bedeuten, und γ der innere Winkel ist, welchen die Richtung, auf welcher x in den Eckpunkt rückt, mit derjenigen Tangente bildet, zu welcher der Grenzwert V_1 gehört.

Der Grenzwert von u_1 ist also auch dem Betrage nach nicht grösser als der grösste Betrag von V_1 und V_2.

§ 34.

Aus diesen Betrachtungen folgt nun weiter: Ist die Funktion U so beschaffen, dass sie an einzelnen Stellen, die auch Eckpunkte des Randes sein können, eine sprungweise Wertänderung erleidet, so stellt jede der früher gefundenen Reihen, z. B.

$$u = -C + \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int (P - P_1)(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int (P_2 - P_3)(d\sigma)_x - \dots$$

eine harmonische Funktion dar, welche im allgemeinen stetig nach dem Randwert U konvergiert, bei Annäherung an die Stellen aber, an denen U eine sprungweise Wertänderung von U' zu U'' besitzt, je nach der Richtung, in welcher man in den Randpunkt übergeht, den Wert

$$\lim u = \left(1 - \frac{\gamma}{a}\right) U' + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) U'' \; (\alpha = \text{ oder } < \pi)$$

hat; γ bezeichnet den inneren Winkel zwischen dieser Richtung und derjenigen Tangentenrichtung, zu welcher der Wert U' gehört. Dass in der That die obige Reihe für alle inneren Punkte konvergiert, und eine harmonische Funktion darstellt, ergiebt sich auch hier aus der Eigenschaft, dass sie für alle inneren Punkte gleichmässig konvergent ist.

Verfolgt man das Verhalten der einzelnen Integrale der obigen Reihe beim Übergang in einen Unstetigkeitspunkt einzeln, so gelangt man zu demselben Ergebnis.

Die vorstehende Formel für das Verhalten in der Umgebung eines Unstetigkeitspunktes von U gilt auch, wenn $\alpha > \pi$ ist; ein Fall, der bei der vorliegenden Art von Flächen dann eintreten kann, wenn die Potentialfunktion für das Äussere der Kurve gebildet werden soll.

Die Funktion u ist zugleich die einzige harmonische Funktion, welche zu den gegebenen Randwerten U gehört. Soll nämlich eine harmonische Funktion u im allgemeinen stetig in die Randwerte U übergehen und bleibt nur in der Umgebung einzelner Randstellen, an denen U unstetig ist, das Verhalten der Funktion u fraglich, so ist die Funktion u eindeutig bestimmt, sobald man fordert, dass sie in der Umgebung dieser Stellen endlich bleibt. Angenommen, es seien zwei Funktionen vorhanden, so wäre ihre Differenz eine harmonische Funktion, die im allgemeinen die Randwerte null besitzt und nur in der Umgebung einzelner Randstellen von null verschieden aber jedenfalls endlich ist. Solch eine Funktion muss aber überall den Wert null haben, wie sich folgendermassen beweisen lässt.

Die Randstellen, in deren Umgebung das Verhalten der Funktion u unbekannt ist, umschliesse man mit Bogenstücken des Randes, die beliebig klein gewählt werden können. Da die Funktion u durchaus endlich bleiben soll, so lässt sich eine obere Grenze K angeben, die von den Beträgen der Funktion u nicht überschritten wird. Man bezeichne nun mit V die Randfunktion, welche in den Punkten des Randes im allgemeinen den Wert null hat und nur in den oben bezeichneten Bogenstücken den Wert K hat. Bildet man nun das Integral

$$v = \frac{1}{\pi} \int V \, (d\sigma)_x,$$

so stellt dasselbe eine harmonische Funktion dar, im allgemeinen mit den Randwerten $V + P$, wobei $P = \frac{1}{\pi} \int V (d\sigma)_s$. Die Grösse P ist durchaus positiv; ihr Wert ist $K \frac{1}{\pi} \int (d\alpha)_s$, wenn wir mit $d\alpha$ die Elemente aller derjenigen Teile des Randes bezeichnen, auf welchen V den Wert K hat. Die Differenz $v - u$ wird nun bei Annäherung an den Rand niemals negativ. Denn im allgemeinen konvergiert diese Differenz nach dem Wert P, weil u den Grenzwert null hat. Nähert man sich aber einer Stelle, an welcher V unstetig ist, so konvergiert diese Differenz nach dem Werte $\left(1 - \frac{\beta}{\pi}\right) K + P$, und nähert man sich einer Stelle, an welcher das Verhalten von u unbestimmt ist, so wird diese Differenz doch noch grösser als P, weil die Werte von u immer kleiner bleiben als K, während v den Grenzwert $K + P$ hat. Ist die singuläre Stelle eine Ecke, so wird der Grenzwert von v gleich $\left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right) K + P_s$ und die Differenz ist also immer noch grösser als P. Mithin ist u stets kleiner als v. Dagegen folgt durch die nämliche Betrachtung, dass u grösser ist als $-v$. Der Betrag der Funktion

$$v = \frac{1}{\pi} \int V \, (d\sigma)_x = K \, \frac{1}{\pi} \int (d\alpha)_x$$

kann aber beliebig klein gemacht werden für jeden inneren Punkt x, da die Bogenstücke, deren Elemente $d\alpha$ sind, beliebig klein werden. Mithin muss u für jeden inneren Punkt null sein.

Für alle im Endlichen geschlossenen Flächen, deren Randkurve die am Anfang dieses Kapitels geforderten Eigenschaften besitzen, ist also die Theorie der Potentialfunktionen hinsichtlich ihrer Eindeutigkeit und ihrer Konstruierbarkeit bei gegebenen Randwerten U, selbst bei solchen, die Unstetigkeitssprünge besitzen, in befriedigender Weise erledigt.

Man kann die Betrachtungen auch noch ausdehnen auf den Fall, dass U überhaupt nur eine endliche, integrierbare Funktion bildet; doch gehe ich auf denselben nicht weiter ein, weil er nichts wesentlich Neues bietet.

§ 35.

Die gewonnenen Ergebnisse führen noch zu der Erkenntnis allgemeiner Eigenschaften der Potentialfunktionen im Innern von Flächen, in denen sie regulär sind, zunächst freilich nur für solche Flächen, bei denen die Konstruierbarkeit der Funktion aus gegebenen Randwerten festgestellt ist, bei denen also die Tangenten der Randkurve nicht in das Innere eintreten.

1. Bezeichnet D die grösste Schwankung der Werte einer Potentialfunktion längs des Randes, d. h. den Unterschied des algebraisch grössten und des algebraisch kleinsten Wertes, welchen sie auf dem Rande besitzt, so ist auf jeder Kurve l, welche ganz im Innern der Fläche liegt, die grösste Schwankung D' kleiner als kD, wobei der Faktor k eine bestimmte Grösse kleiner als 1 ist, die unabhängig ist vom Werte D.

Sind auf dem Rande der Fläche die Werte U gegeben, deren grösster G, deren kleinster K heisse, so dass $G - K = D$ ist, so zerlege man den Rand in die Stücke α und β. Zu α sollen alle diejenigen Bestandteile gehören, auf welchen U gleich oder grösser ist als $M = \frac{1}{2}(G + K)$, zu β alle diejenigen, auf welchen U kleiner ist als M.

Konstruiert man die harmonische Funktion v_1, welche auf α den Wert G, auf β den Wert M hat, so ist der Wert, den dieselbe in einem Punkt der inneren Kurve l liefert, sicherlich nicht kleiner als der Wert, welchen u daselbst besitzt. Desgleichen wird der Wert von v_2 nicht grösser als der Wert u, wenn v_2 diejenige harmonische Funktion ist, welche auf α den Wert M, auf β den Wert K besitzt. Es wird also genügen zu ermitteln, wie gross der Unterschied zwischen dem grössten Wert von v_1 und dem kleinsten von v_2 auf der Kurve l werden kann.

Man kann v_1 und v_2 aus zwei Funktionen $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ entstehen lassen. Die erste habe auf α den Wert 1, auf β den Wert null; die andere auf α den Wert null, auf β den Wert 1. Es ist dann $v^{(1)} + v^{(2)}$ konstant gleich 1 im Innern der Fläche, weil diese Summe eine harmonische Funktion ist, die am Rande überall den Wert 1 hat; ferner ist

$$v_1 = Gv^{(1)} + Mv^{(2)} = G - (G - M)\,v^{(2)} = G - \frac{1}{2}(G - K)\,v^{(2)}$$

$$v_2 = Mv^{(1)} + Kv^{(2)} = K - (K - M)\,v^{(1)} = K + \frac{1}{2}(G - K)\,v^{(1)}.$$

Bezeichnet s denjenigen Punkt auf l, in welchem v_1 am grössten wird, und t denjenigen Punkt, in welchem v_2 am kleinsten wird, und sind $v_s^{(2)}$ und $v_t^{(1)}$ die Werte von $v^{(2)}$ und $v^{(1)}$ in diesen Punkten, so wird

$$v_1 - v_2 = (G - K)\left\{1 - \frac{1}{2}(v_s^{(2)} + v_t^{(1)})\right\}.$$

Die Grössen $v_s^{(2)}$ und $v_t^{(1)}$ sind höchstens gleich 1 und können nicht beide gleichzeitig null werden. Denn $v^{(1)}$ wird nur dann null, wenn α null ist, und $v^{(2)}$ nur dann, wenn β null ist, beides kann aber niemals zugleich eintreten. Mithin ist $1 - \frac{1}{2}(v_s^{(2)} + v_t^{(1)})$ ein echter Bruch, der mit k bezeichnet werden soll und nur abhängt von der Lage der Kurve l und von der Verteilung der Bogenstücke α und β. Der Maximalwert der Differenz $v_1 - v_2$ ist sonach kD, und folglich ist auch $D' \leqq kD$.

2. Teilt man wiederum den Rand in irgendwelcher Weise in Bogenstücke α und β ein und konstruiert man eine harmonische Funktion, welche auf den Stücken β den Wert null hat, auf α aber irgendwelche Werte U besitzt, deren grösster Betrag G sein möge, so ist auf jeder Kurve l, die ganz im Innern der Fläche liegt, der Betrag der harmonischen Funktion u kleiner als kG, wobei k ein echter Bruch ist, der von G unabhängig ist.

Konstruiert man nämlich die Funktion v, welche auf α den Wert G und auf β den Wert null hat, so ist der Betrag von v sicherlich nicht kleiner als der von u. Es ist aber

$$v = Gv^{(1)}$$

und $v^{(1)}$ ein Wert, der nach der obigen Definition in den Punkten der Linie l kleiner ist als 1; also ist auch

$$[u] \leqq kG,$$

k ist unabhängig von G, aber abhängig von der Lage der Kurve l und den Bogenstücken α und β.

Diese Sätze und ebenso der folgende gelten auch, wenn die harmonische Funktion beim Übergang in den Rand nicht mehr allenthalben stetig bleibt, sobald nur G einen Betrag bezeichnet, der von den Werten der Funktion bei Annäherung an die Randstücke α nie überschritten wird.

3. Der vorstehende Satz bleibt auch dann noch bestehen, wenn die Kurve l bis an den Rand tritt, so jedoch, dass ihre Endpunkte nur mit Punkten der Bogenstücke β zusammenfallen, oder mit solchen Punkten, in denen α und β zusammenstossen. Im letzteren Fall soll aber die Kurve l das Bogenstück α nicht tangieren.

Es gilt nämlich auch hier die Gleichung

$$v = Gv^{(1)},$$

wobei $v^{(1)}$ ein echter Bruch auf l ist. Denn wenn die Kurve l den Bogen β in einem Punkt trifft, der nicht zugleich Endpunkt von α ist, so hat $v^{(1)}$ in solch einem Endpunkt von l den Wert null, und die harmonische Funktion $v^{(1)}$ besitzt auf l einen Maximalwert, der kleiner ist als 1. In einem Endpunkt von α und β, der zugleich eine Ecke mit der Winkelöffnung a sein kann, ist der Wert von $v^{(1)}$ gleich $\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right)$, wobei γ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Endpunkte von l mit dem Bogen α bildet. Auch dieser Wert ist kleiner als 1, so dass der Maximalwert von $v^{(1)}$, mag er nun im Endpunkte oder im Innern der Kurve l liegen, ein echter Bruch ist.

Die vorstehenden Sätze gelten auch für eine Potentialfunktion, die für das Äussere einer Kurve definiert ist, falls dieselbe im Unendlichen verschwindet oder einen endlichen Wert hat. Denn in diesem Fall liegen die extremen Werte der Funktion gleichfalls nur auf dem Rande der Fläche (§ 13), so dass die früheren Schlüsse giltig bleiben. Unter den oben eingeführten Funktionen $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ sind hier diejenigen Potentialfunktionen zu verstehen, die am Rande α und β die vorgeschriebenen Werte 1 oder 0 haben, und im Unendlichen endlich bleiben.

§ 36.

Für die vorliegende Art von Flächen ist auch die Aufgabe lösbar, eine harmonische Funktion u zu konstruieren, deren Ableitung nach der Normalen am Rande vorgeschriebene Werte hat, eine Aufgabe, die man übrigens in der Ebene auch durch Bestimmung der konjugierten Funktion erledigen kann.

Betrachten wir zunächst den innerhalb der Randkurve gelegenen Teil der Ebene, und sind $\frac{\partial U}{\partial n} = f(\sigma)$ die vorgeschriebenen Randwerte, so muss, damit überhaupt eine eindeutige harmonische Funktion zu stande kommen kann:

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = \int f(\sigma)\, d\sigma = 0$$

sein. Dies vorausgesetzt bilden wir die Funktion

$$v = \frac{1}{\pi} \int \frac{\partial U}{\partial n} T_i d\sigma = \frac{1}{\pi} \int f(\sigma)\, T_i d\sigma;$$

es ist dies ein Potential, dessen Randwerte V mit den Randwerten U der zu bestimmenden Funktion u in der Beziehung steht, dass

$$V = -U + P = -U + \frac{1}{\pi} \int U (d\sigma)_s.$$

Konstruiert man nun zu V die zugeordneten Randfunktionen:

$$Q = \frac{1}{\pi} \int V (d\sigma)_s, \quad Q_1 = \frac{1}{\pi} \int Q\, (d\sigma)_s, \quad Q_2 = \frac{1}{\pi} \int Q_1 (d\sigma)_s \ldots,$$

so stehen diese zu der gesuchten Funktion U in der Beziehung, dass

$$Q = -P + P_1, \;\; Q_1 = -P_1 + P_2, \;\; Q_2 = -P_2 + P_3, \ldots \;\; Q_n = -P_n + P_{n+1}, \ldots$$

Man ersieht hieraus, dass die Funktionen Q nach 0 konvergieren, und dass die Funktion U, welche überhaupt nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, der Gleichung genügt:

$$1) \qquad U = -(V + Q + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n + \ldots).$$

Es handelt sich also darum, die harmonische Funktion zu bilden, welche diesen Randwert besitzt; dieselbe ist nach früheren Sätzen gleich

$$2) \qquad u = -\frac{1}{\pi} \int (V + Q_1 + Q_3 + Q_5 + \ldots)\, (d\sigma)_x.$$

Wenn man nun aber bestätigen will, dass diese Funktion wirklich die Eigenschaft hat, dass ihre Ableitung längs des Randes $\frac{\partial u}{\partial n} = f(\sigma)$ ist, so ist noch ein Umstand zu berücksichtigen. Zunächst kann man folgendermassen schliessen: es ist

$$3) \qquad u = \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial T_i}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial U}{\partial n} T_i d\sigma$$

oder wenn man für U den Wert aus der Gleichung 1) einsetzt und die Gleichungen 2) und 3) alsdann vergleicht:

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial U}{\partial n} T_i d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int V (d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int (Q - Q_1)(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi} \int (Q_2 - Q_3)(d\sigma)_x - \ldots$$

Die rechte Seite ist eine Potentialfunktion mit den Randwerten $\frac{1}{2}V$, folglich ist die rechte Seite identisch mit

$$\frac{1}{2\pi}\int f(\sigma)\, T_i d\sigma,$$

und es besteht also die Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n}\, T_i d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int f\, T_i d\sigma.$$

Um aus dieser Gleichung zu folgern, dass $\frac{\partial U}{\partial n} = f$ ist, muss man nachweisen, dass die durch die Gleichung 2) definierte Funktion u eine bestimmte Ableitung nach der Normalen in allen Punkten des Randes besitzt. Für diesen Beweis sind besondere Voraussetzungen über die Funktion f notwendig, wie im § 9 angegeben wurde.

Es ist aber auch unabhängig von der Beziehung zu der gesuchten Funktion u der Nachweis zu liefern, dass die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung 2) konvergiert. Derselbe ist leicht zu erhalten. Das Potential

$$v = \frac{1}{\pi}\int f\, T_i d\sigma$$

lässt sich darstellen in der Form

$$v = -C + \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int (Q - Q_1)(d\sigma)_x - \frac{1}{\pi}\int (Q_2 - Q_3)(d\sigma)_x - \dots$$

wenn C der Wert ist, nach welchem die Funktionen Q_n konvergieren. Es ist zu zeigen, dass derselbe null ist. Nun ist (§ 32)

$$C = \frac{1}{2\pi}\int V \frac{\partial \Gamma}{\partial N}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\Gamma \int \frac{\partial V}{\partial N}\, d\sigma,$$

wenn $\frac{\partial V}{\partial N}$ die Ableitungen des Potentiales sind, welches im äusseren Gebiete der Kurve von der Belegung f erzeugt wird. Da nun

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial N} = -2\pi f$$

und $\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0$, so folgt:

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V}{\partial N}\, d\sigma = -\int f d\sigma = 0, \text{ also ist } C = 0.$$

Um dieselbe Aufgabe für das Äussere der Kurve zu lösen, brauchen die Werte von f nicht an die Bedingung $\int f d\sigma = 0$ geknüpft zu werden. Ist $-\frac{1}{2\pi}\int f d\sigma = A$, so giebt dieser Wert das Verhalten der ge-

suchten Funktion im Unendlichen an. Bestimmt man nun die harmonische Funktion, sie heisse $\alpha(x, y)$, welche am Rande der Fläche konstant gleich A ist, und im Unendlichen unendlich wird wie $A\,l\left(\frac{1}{r}\right)$ (es ist $\mathsf{A} = A\Gamma$), so ist die gesuchte Funktion darstellbar in der Form:

$$u = -\frac{1}{\pi}\int (V + Q_1 + Q_3 + \ldots)\,(d\sigma)_x + \alpha(x, y), \tag{4}$$

wobei die Funktionen V und Q ähnlich wie früher definiert sind, jedoch durch die Werte:

$$v = \frac{1}{\pi}\int f\,T_a\,d\sigma + 2\alpha(x, y), \quad V = \lim \frac{1}{\pi}\int f\,T_a\,d\sigma + 2\mathsf{A},$$

$$Q = \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_s, \quad Q_1 = \frac{1}{\pi}\int Q\,(d\sigma)_s, \quad Q_2 = \frac{1}{\pi}\int Q_1\,(d\sigma)_s, \ldots$$

Die Normale ist nach der äusseren Fläche zu konstruieren. Denn aus der Gleichung 4) folgt:

$$U = -(V + Q + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots) + \mathsf{A},$$

und folglich:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\pi}\int (V + Q_1 + Q_3 + \ldots)\,(d\sigma)_x + \alpha(x, y) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int (V + Q + Q_1 + \ldots)\,(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N}\,T_a\,d\sigma, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N}\,T_a\,d\sigma \\ = &\frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int (Q - Q_1)\,(d\sigma)_x - \frac{1}{2\pi}\int (Q_2 - Q_3)(d\sigma)_x \ldots - \alpha(x, y). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist eine Potentialfunktion mit den Randwerten $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}\lim Q_{2n} - \mathsf{A}$, welche im Unendlichen unendlich wird wie $-A\,l\left(\frac{1}{r}\right)$, und folglich ist die rechte Seite identisch mit $\frac{1}{2\pi}\int f\,T_a\,d\sigma$, wenn gezeigt werden kann, dass $\lim Q_{2n} = 0$ ist. Nun ist aber

$$v = \frac{1}{\pi}\int f\,T_a\,d\sigma + 2\alpha(x, y)$$

eine Potentialfunktion, welche im Unendlichen verschwindet; also konvergieren die Funktionen Q nach null. Sonach besteht die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial U}{\partial N}\,T_a\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int f\,T_a\,d\sigma.$$

Um hieraus zu schliessen, dass $\frac{\partial U}{\partial N} = f$ ist, sind aber weitere Untersuchungen über die Ableitungen nach der Normalen sowohl für die Funktion $\alpha(x, y)$, als für den übrigen Teil des Ausdruckes von u erforderlich.

Aus allgemeinen Sätzen über die analytische Fortsetzung einer Potentialfunktion, welche im folgenden Kapitel besprochen werden, lässt sich schliessen, dass der vollständige Beweis der vorstehenden Formeln erbracht werden kann, falls die Randkurve aus analytischen Kurvenstücken zusammengesetzt und die gegebene Funktion f bis auf einzelne Punkte regulär analytisch ist (§ 42).

Viertes Kapitel.

Die Existenz der Potentialfunktionen für Polygone und beliebig berandete, einfach oder mehrfach zusammenhängende Flächen.

---

§ 37.

Durch die Neumannsche Methode ist festgestellt, dass insbesondere für jedes geradlinige (oder auch aus Kreisbögen zusammengesetzte) Polygon ohne einspringende Ecken (abgesehen vom Dreieck und Viereck) eine und nur eine harmonische Funktion existiert, welche stetig nach gegebenen Randwerten U konvergiert, falls U selbst eine stetige Funktion längs des Randes ist, und welche im allgemeinen stetig nach diesen Randwerten konvergiert, aber überall endlich bleibt, wenn U eine überall endliche und im allgemeinen stetige Funktion auf dem Rande ist, die nur an einzelnen Stellen endliche Unstetigkeitssprünge erleidet.

Um analoge Sätze für Polygone mit einspringenden Ecken zu gewinnen, muss man diese aus Polygonen ohne einspringende Ecken zusammensetzen. Betrachtet man den einfachsten Fall, den eines Viereckes $ABCD$ mit einer einspringenden Ecke B, und verlängert man die Seiten AB und CB, bis sie die gegenüberliegenden in den Punkten E und F schneiden, so besteht das Viereck aus den beiden Dreiecken AED und CFD, welche die Fläche $BEDF$ gemein haben. Es ist zu zeigen, dass für das Viereck $ABCD$ die Konstruktion einer harmonischen Funktion aus gegebenen Randwerten möglich ist, wenn für die beiden Dreiecke die analoge Aufgabe gelöst ist.

Man kann dies Problem gleich allgemein so fassen: Haben zwei Gebiete T_1 und T_2 die Fläche T_0 gemein, die auch aus verschiedenen getrennten Teilen bestehen kann, und ist für T_1 sowohl, wie für T_2 die Randwertaufgabe lösbar, so lässt sich auch für das zusammengesetzte Gebiet $T_1 + T_2 - T_0$ die nämliche Aufgabe lösen. Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich dann auch für das Dreieck und Viereck die

Existenz der Funktion u nachweisen, da man jede dieser Figuren aus zwei Polygonen kombinieren kann.

Die Begrenzung von T_1 heisse l_1 und l_3, die Begrenzung von T_2 heisse l_2 und l_4, und zwar sei l_1 derjenige Teil der Begrenzung von T_1, welcher nicht zugleich eine Begrenzung von T_0 ist, ebenso l_2 derjenige Teil der Begrenzung von T_2, welcher nicht zugleich Begrenzung von T_0 ist; l_3 und l_4 bilden die Begrenzung von T_0 und können daher auch teilweise zusammenfallen. Diese zusammenfallenden Teile werde ich λ nennen. Die Linie l_4 soll, wo sie an l_1 und l_3 (oder l_1 und λ) stösst, diese Linien nicht berühren, sondern einen Winkel mit ihnen bilden, und ebenso soll l_3 einen Winkel bilden mit den Linien l_2 und l_4 (oder l_2 und λ).

Es sind nun Werte U vorgeschrieben für die Strecken l_1, l_2, λ; und zwar sei G der algebraisch grösste, K der algebraisch kleinste unter diesen Werten. Man konstruiere für die Fläche T_1 eine unendliche Reihe von harmonischen Funktionen, die mit $u_1, u_3, u_5, \ldots$ bezeichnet werden soll, für T_2 eine unendliche Reihe, die $u_2, u_4, u_6 \ldots$ heissen möge. Dieselben sind in folgender Weise definiert:

u_1 habe längs l_1 und λ die vorgeschriebenen Werte U, längs l_3 den Wert K. Diese Funktion besitzt auf l_4 Werte, die zwischen G und K liegen, sie sollen $u_1^{(4)}$ heissen.

u_2 habe längs l_2 und λ die Werte U, längs l_4 den Wert $u_1^{(4)}$. Diese Funktion besitzt auf l_3 Werte, die $u_2^{(3)}$ heissen sollen.

In dem gemeinsamen Gebiet T_0 hat die Differenz $u_2 - u_1$ nur positive Werte. Denn an dem Rande λ und l_4 ist diese Differenz null, auf l_3 ist sie positiv, weil $u_1^{(3)}$ gleich K ist, während $u_2^{(3)}$ gleich oder grösser als K wird. Also ist $u_2^{(3)} - u_1^{(3)} \geqq 0$.

u_3 habe längs l_1 und λ die Werte U, längs l_3 den Wert $u_2^{(3)}$. Es ist mithin $u_3 \geqq u_1$. Der Wert, den u_3 auf l_4 besitzt, heisse $u_3^{(4)}$.

u_4 habe längs l_2 und λ die Werte U; längs l_4 den Wert $u_3^{(4)}$. Es ist $u_4 \geqq u_2$, weil $(u_4^{(4)} = u_3^{(4)}) \geqq (u_2^{(4)} = u_1^{(4)})$. Der Wert von u_4 auf l_3 heisse $u_4^{(3)}$.

u_5 habe längs l_1 und λ die Werte U, längs l_3 den Wert $u_4^{(3)}$. Es ist mithin $u_5 \geqq u_3$.

Fährt man sofort, so erhält man die unbegrenzte Reihe von Funktionen

$$u_1, u_3, u_5, \ldots u_{2n+1}, \ldots,$$

in welcher jede folgende niemals kleiner ist als die vorhergehende, und ebenso die Reihe

$$u_2, u_4, u_6, \ldots . u_{2n}, \ldots,$$

welche dieselbe Eigenschaft hat. Eine jede Funktion der ersten Reihe hat längs l_1 und λ die Werte U, und jede der zweiten hat längs l_2 und λ die Werte U. Ferner ist längs l_4:

$$u_{2n+1}^{(4)} = u_{2n+2}^{(4)}$$

und längs l_3:

$$u_{(2n+1)}^{(3)} = u_{2n}^{(3)}.$$

Da die Reihe der Funktionen u_{2n+1} eine Reihe von Grössen bildet, die für jeden innern Punkt der Fläche T_1 nicht abnehmen und doch kleiner bleiben als G, so konvergiert u_{2n+1} für jeden Punkt der Fläche T_1 nach einer bestimmten Grenze u', die man durch die unendliche Summe

$$u' = u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \ldots (u_{2n+1} - u_{2n-1}) + \ldots$$

definieren kann, und ebenso wird für die Fläche T_2 eine Funktion u'' durch die unendliche Summe definiert:

$$u'' = u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \ldots (u_{2n} - u_{2n-2}) + \ldots$$

Da die in der Klammer stehenden Differenzen alle einerlei Zeichen haben, so folgt aus dem Satz des § 20, dass u' eine harmonische Funktion für das ganze Innere der Fläche T_1 und ebenso u'' eine harmonische Funktion für das ganze Innere der Fläche T_2 ist. Mithin sind u' und u'' harmonische Funktionen für das gemeinsame Gebiet T_0.

Um nun die Werte festzustellen, welche diese Funktionen an den Rändern ihrer Gebiete besitzen, muss man beachten, dass die Funktionen u_{2n+1} und u_{2n} an den Stellen, wo l_3 und l_4 zusammenstossen, unstetig sein können, so dass der erste Satz auf Seite 67 nicht unmittelbar anwendbar ist. Indessen lässt sich auf Grund der im § 35 bewiesenen Eigenschaft zeigen, dass jede dieser Reihen für alle Punkte ihres Gebietes einschliesslich der Randpunkte gleichmässig konvergiert. Bezeichnet nämlich D die grösste Schwankung unter den Werten U, also die Differenz $G - K$, so ist $u_3 - u_1$ eine harmonische Funktion für das Gebiet T_1, welche am Rande längs der Strecken l_1 und λ null ist, und längs l_3 kleiner als D, folglich ist diese Differenz in der ganzen Fläche T_1 kleiner als D, und insbesondere wird $u_3^{(4)} - u_1^{(4)} < kD$, wobei k ein echter Bruch ist.

Desgleichen ist $u_4 - u_2$ eine harmonische Funktion für das Gebiet T_2, welche längs der Strecken l_2 und λ den Wert null und längs l_4 den Wert hat $u_3^{(4)} - u_1^{(4)}$. Da dieser Wert kleiner ist als kD, so

ist $u_4 - u_2$ in der ganzen Fläche T_2 kleiner als kD, und insbesondere wird $u_4^{(3)} - u_2^{(3)} < kk'D$, wobei k' ein echter Bruch ist.

Hieraus folgt weiter, dass $u_5 - u_3$ in der ganzen Fläche T_1 kleiner als $kk'D$ ist, und $u_6 - u_4$ in der ganzen Fläche T_2 kleiner als $k^2k'D$. Allgemein $u_{2n+1} - u_{2n-1}$ wird in der ganzen Fläche T_1 kleiner als $(kk')^{n-1}D$, und $u_{2n+2} - u_{2n} < (kk')^{n-1}kD$.

Mithin konvergiert jede der obigen Reihen für alle Randpunkte gleichmässig, nämlich rascher als eine geometrische Progression, und folglich wird der Grenzwert der Funktionen U' und U'' erhalten, indem man die Grenzen der einzelnen Glieder in den Reihen bestimmt, d. h. es ist

$$U' = \lim_{n=\infty} U_{2n+1}, \quad U'' = \lim_{n=\infty} U_{2n},$$

wenn man mit U_{2n+1} und U_{2n} die Grenzwerte bezeichnet, welche die Funktionen u_{2n+1} und u_{2n} beim Übergang in den Rand besitzen.

Auf den Strecken l_1, l_2, λ sind die Grenzwerte die vorgeschriebenen Werte U, auf den Strecken l_3 und l_4 werden die Grenzwerte einander gleich. Denn es ist

$$U^{(3)}_{2n+1} = U^{(3)}_{2n}, \quad U^{(4)}_{2n+2} = U^{(4)}_{2n+1}.$$

Die Differenz $u' - u''$ ist demnach in dem gemeinsamen Gebiete T_0 auf dem Rande allenthalben gleich null, und folglich auch in dem Eckpunkte, in welchem die Linien l_3 und l_4 zusammenstossen (§ 34).

Daraus folgt, dass u'' die Fortsetzung der harmonischen Funktion u' in das Gebiet T_2 ist, so dass u' und u'' diejenige harmonische Funktion bilden, welche für das Gebiet $(T_1 + T_2 - T_0)$ die vorgeschriebenen Randwerte U besitzt. Dass diese Funktion auch bei Annäherung an die Ecke, in welcher λ_3 und λ_4 zusammenstossen, nach dem daselbst vorgeschriebenen Werte U konvergiert, lässt sich überdies folgendermassen einsehen. Ist α der Winkel zwischen l_1 und l_4, so ist nach früheren Sätzen der Wert von $U^{(4)}_{2n+1}$ in dem Eckpunkte

$$U^{(4)}_{2n+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U + \frac{\alpha}{\pi} U^{(3)}_{2n+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U + \frac{\alpha}{\pi} U^{(3)}_{2n}$$

und

$$U^{(3)}_{2n} = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U + \frac{\alpha}{\pi} U^{(4)}_{2n} = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U + \frac{\alpha}{\pi} U^{(4)}_{2n-1},$$

also wird:

$$U^{(4)}_{2n+1} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) U + \frac{\alpha^2}{\pi^2} U^{(4)}_{2n-1},$$

und da

$$\lim_{n=\infty} U^{(4)}_{2n+1} = \lim_{n=\infty} U^{(4)}_{2n-1},$$

so ist auch

$$\lim_{n=\infty} U^{(4)}_{2n+1} = U = \lim_{n=\infty} U^{(4)}_{2n+2}.$$

Desgleichen wird auch $\lim\limits_{n=\infty} U^{(3)}_{2n+1} = U$, d. h. die Funktion u' sowohl wie u'' bleibt bei Annäherung an die Ecke stetig.

Diese Kombinationsmethode ist von den Herren Neumann und Schwarz gleichzeitig gefunden worden.

Dieselbe bleibt auch in Geltung, wenn die Funktion U an einzelnen Stellen sprungweise Wertänderungen erleidet. Bei Annäherung an solch eine Stelle verhalten sich die Werte der harmonischen Funktion in der nämlichen Weise, wie im § 33 gezeigt wurde:

$$\lim u = \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) U' + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) U''.$$

Auch für die einspringende Ecke gilt diese Gleichung. Denn ist eine Ecke mit dem Winkel $\alpha > \pi$ vorhanden, und konstruiert man eine Gerade, welche diesen Winkel halbiert, so muss, wenn U' und U'' die Randwerte zu beiden Seiten der Ecke sind und V der unbekannte Grenzwert auf der Halbierungslinie, in jedem der beiden Winkel $\frac{\alpha}{2}$ für jede Richtung die analoge Gleichung bestehen:

$$\lim u^{(1)} = U^{(1)} = \left(1 - \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) U' + \left(1 - \frac{\delta}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) V, \quad \gamma + \delta = \frac{\alpha}{2},$$

wennn γ der innere Winkel zwischen der angenommenen Richtung und dem Teile des Randes bedeutet, auf welchem U den Wert U' hat; ebenso ist symmetrisch zur Halbierungslinie

$$\lim u^{(2)} = U^{(2)} = \left(1 - \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) U'' + \left(1 - \frac{\delta}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) V.$$

Auf dieselbe Weise aber folgt $V = \frac{1}{2} U^{(1)} + \frac{1}{2} U^{(2)}$ und hieraus ergiebt sich: $V = \frac{1}{2}(U' + U'')$. Hierbei ist vorausgesetzt, dass V überhaupt ein bestimmter Wert sein muss, was aber mittels der obigen Kombinationsmethode ohne weiteres erkannt werden kann.

§ 38.

Eine zweite Methode, um für ein Polygon mit einem einspringenden Winkel die Potentialfunktion aus gegebenen Randwerten zu konstruieren, ist die folgende, bei welcher vorausgesetzt wird, dass die nämliche Aufgabe für das Innere sowohl als auch für das Äussere eines Dreiecks gelöst werden kann: Zieht man die Gerade AC, so erscheint die Fläche des Vierecks mit dem einspringenden Winkel B

als die Differenz zwischen dem Dreieck $ACD \equiv \triangle_1$ und $ABC \equiv \triangle_2$. Wählt man statt der Geraden AC eine gebrochene Linie ohne einspringende Winkel, so sind die Flächen ACD und ACB Polygone, für welche die Randwertaufgabe nach der Neumannschen Methode lösbar ist.

Bezeichnet man die Seiten AD und CD mit l_1, die Seite AC mit λ, ferner die Seiten des zweiten Dreiecks AB und BC mit l_2, so lässt sich die Potentialfunktion, welche auf l_1 die vorgeschriebenen Werte hat und auf l_2 null ist, in folgender Weise konstruieren.

Für das Dreieck $\triangle_1$ bestimme man die Funktion u_1, welche auf l_1 den Wert U hat, auf λ null ist. Bezeichnet G den grössten Betrag der Randwerte U, so ist der Wert, welchen u_1 auf l_2 besitzt, er heisse $u_1^{(2)}$, dem Betrage nach kleiner als kG, wobei k ein echter Bruch ist. (§ 35, Nr. 2 u. 3.)

Für das Äussere des Dreiecks $\triangle_2$ konstruiere man diejenige Potentialfunktion, welche auf den Seiten l_2 den Wert $u_1^{(2)}$ und auf λ den Wert null hat und im Unendlichen endlich bleibt. Da die extremen Werte dieser Funktion nicht im Unendlichen, sondern auf dem Rande liegen, so ist der Betrag von u_2 allenthalben kleiner als kG, und insbesondere ist der Wert von $u_2^{(1)}$, d. h. der Wert, den u_2 auf l_1 besitzt, kleiner als $kk'G$, wobei k' ebenfalls ein echter Bruch ist.

Man konstruiere nun für das Dreieck $\triangle_1$ die Funktion u_3, welche auf l_1 den Wert $u_2^{(1)}$, auf λ den Wert null hat; so wird $u_3^{(2)} < k^2 k' G$. Bestimmt man weiter die Funktion u_4 für das Äussere des Dreiecks $\triangle_2$, so dass $u_4^{(2)} = u_3^{(2)}$ ist, so ist $u_4^{(1)} < (kk')^2 G$.

Indem man diesen Prozess weiter fortsetzt, ergiebt sich für das Innere des Dreiecks $\triangle_1$ die unbegrenzte Reihe von harmonischen Funktionen $u_1, u_3, u_5, \ldots u_{2n+1}, \ldots$ und für das Äussere des Dreiecks $\triangle_2$ die unbegrenzte Reihe: $u_2, u_4, u_6, \ldots u_{2n}, \ldots$ Für das gemeinschaftliche Gebiet des ursprünglichen Vierecks $ABCD$ sind sowohl u_{2n}, wie u_{2n+1} harmonische Funktionen. Zwischen denselben besteht längs den Linien l_2 die Relation $u^{(2)}_{2n-1} = u^{(2)}_{2n}$, und längs den Linien l_1 die Relation $u^{(1)}_{2n} = u^{(1)}_{2n+1}$. Bildet man nun die Reihe

$$u = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + \ldots,$$

so definiert dieselbe eine harmonische Funktion für das Viereck.

Denn die Reihe, gebildet aus den Randwerten der Funktion u_i, ist eine gleichmässig konvergente, weil der Betrag von u_{2n} kleiner ist als $k(kk')^{n-1}G$, und der Betrag von u_{2n+1} kleiner ist als $(kk')^n G$. Die Werte, welche die Funktion u am Rande l_1 und am Rande l_2

besitzt, werden demnach durch die Werte dargestellt, welche von den Randwerten der Funktionen u_i geliefert werden; d. h. es ist

$$u^{(1)} = (U - u_2^{(1)}) + (u_3^{(1)} - u_4^{(1)}) + (u_5^{(1)} - u_6^{(1)}) + \ldots = U - \lim u_{2n}^{(1)} = U,$$
$$u^{(2)} = (u_1^{(2)} - u_2^{(2)}) + (u_3^{(2)} - u_4^{(2)}) + (u_5^{(2)} - u_6^{(2)}) + \ldots = 0.$$

In derselben Weise kann man für das Viereck $ABCD$ die Funktion konstruieren, welche auf den Seiten l_2 vorgeschriebene Werte U und auf l_1 den Wert null hat. Zu diesem Zweck muss man den Prozess mit der Bildung der harmonischen Funktion für das Äussere des Dreiecks $\triangle_2$ beginnen, indem man dieser Funktion auf den Seiten l_2 den Wert U, auf der Seite λ den Wert null erteilt. Im Unendlichen soll sie endlich bleiben.

Die beiden Funktionen zusammen ergeben dann die harmonische Funktion, welche auf den Seiten l_1 und l_2 des Vierecks die vorgeschriebenen Randwerte U hat, in welche sie stetig übergeht, falls U durchaus stetig ist.

Dass auch in den Eckpunkten, in welchen die Linien l_1 und l_2 zusammenstossen, die harmonische Funktion stetig bleibt, vorausgesetzt, dass U daselbst stetig ist, folgt aus dem Satz im § 34 über die Eindeutigkeit der Potentialfunktion. Man braucht nur in der Umgebung der Ecke ein solches Stück des Polygons zu betrachten, dass auf dasselbe die Sätze über geschlossene Polygone ohne einspringende Ecken anwendbar bleiben.

Ein beliebiges Polygon mit n Ecken, unter welchen sich einspringende befinden, lässt sich durch Hinzufügung eines Dreiecks betrachten als Differenz eines $n - 1$ Eckes und eines Dreieckes. Hat dieses $n - 1$ Eck einspringende Winkel, so betrachte man dasselbe als Differenz zwischen einem $n - 2$ Eck und einem Dreieck. Auf diese Weise lässt sich jedes n — Eck schliesslich aus Dreiecken zusammensetzen (oder aus Polygonen ohne einspringende Winkel) und sonach ist durch das vorstehende Verfahren dargethan, dass es für jedes Polygon eine und nur eine harmonische Funktion giebt, welche stetig in die vorgeschriebenen Randwerte U übergeht, falls diese eine stetige Funktion auf der Peripherie bilden.

Man kann den Satz auch gleich erweitern auf mehrfach zusammenhängende Flächen, deren Ränder von lauter Polygonen gebildet werden. Denn denkt man sich, um den nächst einfachen Fall zu nennen, im Innern eines Polygones P_1 ein zweites Polygon P_2, und betrachtet man die ringförmige Fläche, welche von den Polygonen P_1 und P_2 begrenzt ist, so kann man dieselbe zusammensetzen aus zwei Polygonen, indem man etwa von zwei Ecken von P_2 zwei gerade Querschnittslinien nach

zwei Ecken von P_1 zieht. Diese beiden Polygone ändere man längs der Querschnittslinien, an denen sie zusammenstossen, so ab, dass sie daselbst in einander übergreifen, also jedesmal ein Gebiet T_0 gemeinsam haben, welches die Querschnittslinie enthält. Für diese beiden Polygone wird dann der Kombinationssatz des vorigen Paragraphen anwendbar, und sonach wird die Existenz einer Potentialfunktion für die zweifach zusammenhängende, von beliebigen Polygonen begrenzte Fläche dargethan. Eine $n$fach zusammenhängende Fläche gleicher Art kann durch Kombination einer $n-1$fach zusammenhängenden und eines Polygones gebildet werden.

§ 39.

Für ein beliebiges Polygon (einfach oder mehrfach zusammenhängend) ist sonach auch die Existenz der Greenschen Funktion, welche zu irgend einem inneren Punkt O gehört, festgestellt (§ 23); d. h. wird im Innern des Polygones irgend ein Punkt O fixiert und werden die Entfernungen dieses Punktes von den Punkten des Randes mit ϱ bezeichnet, so giebt es eine harmonische Funktion — sie heisse g — welche am Rande die Werte $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ besitzt, und im Innern des Polygones überall regulär ist. Im § 23 ist nachgewiesen, dass für das Innere des Polygones $g < l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ ist.

Im folgenden soll der Nachweis geliefert werden, dass für jedwede ganz im Endlichen liegende, beliebig berandete Fläche die Greensche Funktion existiert. Die Untersuchung soll dabei für die einfach zusammenhängende Fläche geführt werden, doch bleibt sie ohne weiteres für Flächen mit mehreren Randkurven giltig.

Will man eine einfach zusammenhängende Fläche in allgemeinster Weise definieren, so hat man zunächst von dem Begriff eines zusammenhängenden ebenen Kontinuums, welches ganz im Endlichen gelegen ist, auszugehen. In einem endlichen Teil der Ebene sei eine beliebige Menge von Punkten gegeben, mit der Eigenschaft, dass sich um jeden derselben ein endlicher, ebener Bereich (etwa eine Kreisfläche) angeben lässt, so dass die Punkte mit ihren Bereichen dem Systeme angehören, und dass man von jedem Punkte P dieses Systems zu jedem anderen desselben vermittels einer stetigen Reihe von geraden Strecken gelangen kann, deren Punkte ebenfalls mit ihren Bereichen dem Systeme angehören.

Dieses System bildet alsdann ein zusammenhängendes Kontinuum. Dasselbe besitzt, da es sich nicht ins Unendliche erstreckt, Grenz-

punkte, d. h. alle diejenigen Punkte, in deren unmittelbarer Umgebung sowohl Punkte liegen, die dem System P angehören, als auch solche, die nicht mehr zu P gehören. Diese Grenzpunkte P' bilden den Rand unserer Fläche. Auf irgend einem Radiusvektor, der von irgend einem Punkt des Systems P gezogen wird, muss mindestens ein Grenzpunkt liegen; es kann aber auch eine endliche Anzahl, oder eine unendliche von Grenzpunkten vorhanden sein Im letzteren Falle können die Grenzpunkte entweder stetige Strecken auf dem Radiusvektor bilden — alsdann fällt der Radiusvektor teilweise mit dem Rande zusammen — oder die Grenzpunkte bilden auf dem Radiusvektor eine unendliche Menge, die aber alsdann in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist.

Damit die Fläche eine einfach zusammenhängende sei, fordern wir, dass die Grenzpunkte eine einzige stetige Reihe bilden, d. h. dass man von jedem Grenzpunkt P' zu jedem andern gelangen kann, indem man nur Punkte des Systems P' durchläuft. Damit ferner die Fläche nicht in mehrere aneinander stossende, geschlossene Teile zerfällt, sollen die Grenzpunkte P' sich derart in eine stetige Reihe ordnen lassen, dass man bei dem Durchlaufen dieser Reihe nicht früher zu einem Ausgangspunkt P' zurückkehrt, als bis sämtliche Punkte P' durchlaufen sind.

In analytischer Formulierung fordern wir also, dass die Koordinaten x und y der Grenzpunkte P' sich als eindeutige und stetige Funktionen eines Parameters darstellen lassen: $x = \varphi(\lambda)$, $y = \psi(\lambda)$, so dass während λ ein Intervall von λ_0 bis λ_1 durchläuft, sämtliche Grenzpunkte, und zwar jeder nur einmal, erhalten werden, und dass zu den Endwerten λ_0 und λ_1 der nämliche Punkt gehört. Die Funktionen φ und ψ sind im übrigen ganz willkürlich, so dass das stetige System der Grenzpunkte, welches wir auch kurz die Randkurve nennen werden, keine Tangenten zu besitzen braucht, vielmehr unendlich viele Ecken, Spitzen und dergleichen erhalten kann. Ist die Randkurve rektifizierbar, so kann als Parameter λ die Länge s eingeführt werden. Dies tritt z. B. ein, wenn die Randkurve eine analytische Kurve ist, oder aus Stücken von solchen Kurven besteht, d. h. von Kurven, deren Punktkoordinaten durch konvergente Potenzreihen definiert sind.

Die auf diese Weise definierte, einfach zusammenhängende, geschlossene Fläche kann nun aber noch mit Einschnitten in beliebiger Anzahl versehen werden, die vom Rande in das Innere der Fläche bis zu einem bestimmten Endpunkt eintreten, indem man von irgend einem Punkte des Randes aus eine Kurve in das Innere der Fläche zieht, die aber keinen andern Randpunkt treffen und sich nicht schliessen

darf. Diese Kurven sollen alsdann dem Rande der Fläche zugerechnet werden. Bei einem vollständigen Umlauf um die Fläche müssen dieselben zweimal, nämlich hin und zurück, durchlaufen werden. Die Gesamtheit aller Punkte des Randes (die letztgenannten zweimal gezählt) soll die Kurve C heissen.

Im Innern der Fläche werde nun ein Punkt O beliebig angenommen; es soll die Existenz der Greenschen Funktion bewiesen werden, welche zum Punkt O gehört.

Man konstruiere innerhalb der Kurve C eine unendliche Reihe von Polygonen: $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften. Erstens: Jedes Polygon liegt ganz innerhalb der Kurve C, d. h. sein Umfang hat keinen Punkt mit derselben gemein. Zweitens: Der Umfang jedes Polygones P_n liegt ganz ausserhalb des vorhergehenden P_{n-1}. Drittens: Das Polygon P_n soll sich bei wachsenden Werten von n der Kurve C unbegrenzt nähern. Dies wird der Fall sein, wenn jeder Punkt auf dem Polygon P_n so liegt, dass die untere Grenze seiner Entfernungen von den Punkten der Kurve C unterhalb einer Grösse δ sich befindet, die mit wachsenden Werten von n nach null konvergiert. Man kann diese Forderung etwa in der Weise erfüllen, dass man um jeden Randpunkt C einen Kreis mit dem Radius δ beschreibt und alsdann das Polygon P_n so konstruiert, dass es innerhalb der von diesen Kreisen bedeckten Fläche sich befindet. Zu jedem Polygon lässt sich die Greensche Funktion, welche zum Punkt O gehört, konstruieren. Bezeichnet man die für P_n geltende Funktion mit g_n, so erhält man eine unendliche Folge von Funktionen:

$$g_1, \quad g_2, g_3, \cdots g_n, \cdots$$

Von diesen Funktionen soll bewiesen werden, dass sie nach einer ganz bestimmten harmonischen Funktion g konvergieren, und dass diese Funktion g, welche durch die unendliche Summe

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \ldots + (g_n - g_{n-1}) + \ldots$$

darstellbar ist, für die von der Kurve C umschlossene Fläche F diejenige Greensche Funktion ist, welche zum Punkt O gehört.

Man vergleiche zunächst zwei aufeinander folgende Funktionen, z. B. g_1 und g_2, deren Randwerte mit $l\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)$ und $l\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)$ bezeichnet seien. Weil die Greensche Funktion im Innern eines Polygons allenthalben kleiner ist als $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$, und weil das Polygon P_1 ganz im Innern des Polygons P_2 liegt, so sind die Werte, welche g_2 auf dem Polygon P_1

besitzt, kleiner als $l\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)$, also kleiner als g_1. Mithin ist überall im Innern von P_1

$$g_2 < g_1,$$

d. h. die Reihe der Funktionen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ bildet eine Reihe von abnehmenden Grössen; es ist

$$g_1 > g_2 > g_3 > \ldots > g_n > g_{n-1} > \ldots$$

Diese Ungleichungen gelten für jeden Punkt im Innern der Fläche F von einer bestimmten Stelle ab, weil jeder innere Punkt schliesslich innerhalb eines Polygons und aller darauf folgenden zu liegen kommt. Da nun jede der Funktionen g_n in jedem Punkt innerhalb F grösser bleibt als der Wert $l\left(\frac{1}{M}\right)$, wenn M das Maximum der Entfernung der Punkte des Randes C vom Punkte O bedeutet, so folgt, dass die Funktionen g_n in jedem Punkt innerhalb F nach einem bestimmten Grenzwert konvergieren. Beachtet man nun weiter, dass die Differenzen

$$g_2 - g_1, \quad g_3 - g_2, \ldots, g_n - g_{n-1}, \ldots$$

alle einerlei Zeichen haben, nämlich negativ sind, so folgt nach dem Satz am Schluss des § 20, dass die Funktion

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \ldots + (g_n - g_{n-1}) + \ldots$$

eine im Innern von F harmonische Funktion ist.

Es muss nun gezeigt werden, dass diese Funktion g bei Annäherung an den Rand stetig in die Werte $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ übergeht. Zur Vereinfachung der Diskussion führe ich an Stelle der Funktionen g_n und g die Funktionen s_n und s ein, welche durch die Gleichungen

$$s_1 = \varrho e^{g_1}, \quad s_2 = \varrho e^{g_2}, \ldots s_n = \varrho e^{g_n} \ldots \quad \text{und} \quad s = \varrho e^{g}$$

definiert sind. Jede der Funktionen s_n besitzt am Rande des zugehörigen Polygons P_n den konstanten Wert 1 und im Punkte O den Wert null. Ferner sind die Funktionen $l(s_n)$ harmonische Funktionen nach Ausschluss des Punktes O, in welchem sie negativ unendlich werden. Da die Reihe der Funktionen g_n eine abnehmende ist, so ist auch die Reihe der Funktionen s_n eine abnehmende, d. h. es ist für jeden Punkt innerhalb der Fläche

$$s_1 > s_2 > \ldots s_n > s_{n-1} > \ldots > s.$$

Bezeichnet α einen bestimmten positiven Wert kleiner als 1, so bilden die Punkte, in denen s_n den konstanten Wert α hat, eine einfach geschlossene Kurve, welche den Punkt O umgiebt. Sucht man also die Kurven auf, für welche

$$s_1 = \alpha, \quad s_2 = \alpha, \ldots s_n = \alpha \ldots$$

ist, so folgt aus den obigen Ungleichungen, dass jede dieser Kurven ausserhalb der vorhergehenden liegt. Es wird also auch der Ort aller der Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, ausserhalb aller vorhergehenden Kurven sich befinden.

Man muss zuvörderst nachweisen, dass solche Punkte überhaupt im Innern von F vorhanden sind. Zu dem Zwecke denke man sich ein Polygon Q konstruiert, dessen Fläche die Fläche F ganz einschliesst, dessen Umfang aber einen oder mehrere Punkte mit der Kurve C gemein hat. Konstruiert man für dieses Polygon Q die zum Punkt O gehörige Greensche Funktion γ, so ist der Wert von γ im Innern von F kleiner als jede der Funktionen g_n, also auch nicht grösser als die Funktion g. Bezeichnet man mit σ den Wert $\sigma = \varrho e^{\gamma}$, so ist in den Punkten von F $s > \sigma$. Da nun die Kurve $\sigma = \alpha$ jedenfalls in das Innere der Fläche F eintreten muss, weil sie die Punkte ausschliesst, welche das Polygon Q mit dem Rande C gemein hat, und in denen $\sigma = 1$ ist, so sind auch im Innern von F Punkte vorhanden, in denen s gleich oder grösser als α ist.

Der Ort aller der Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, kann nicht eine geschlossene Kurve sein, falls sie nicht den Punkt O einschliesst; denn sonst wäre s allenthalben in F konstant, was zufolge der Gleichung $l(s) = g + l(\varrho)$ unmöglich ist. Ebensowenig können die Punkte, in denen $s = \alpha$ ist, im Innern von F gelegene, nicht geschlossene Kurven bilden, denn bei einer harmonischen Funktion ist dieses überhaupt unmöglich. Sonach ist nur zu zeigen, dass der Ort der Punkte $s = \alpha$ beliebig nahe an den Rand C heranrückt, wenn α beliebig nahe an den Wert 1 rückt, dass aber die Punkte $s = \alpha$ den Rand C niemals erreichen, solange α kleiner als 1 ist.

Konstruiert man das Polygon P_n im Innern der Kurve C, welches derselben beliebig nahe gebracht wird, dadurch, dass man n beliebig gross annimmt, so hat auf demselben die Funktion s_n den Wert 1 und jede der folgenden Funktionen einen Wert, der kleiner ist als 1. Bestimmt man den grössten Wert, welchen die Funktion s auf diesem Polygon annimmt, und nennt man denselben α, so ist für alle Punkte im Innern dieses Polygons der Wert von s kleiner als α; alle Punkte, in denen $s > \alpha$ ist, liegen also zwischen dem Polygon P_n und der Kurve C, d. h. sie kommen der letzteren beliebig nahe.

Die Kurve $s = \alpha$ kann dabei den Rand niemals erreichen. Denn wird wie vorhin das Polygon Q konstruiert, welches mindestens einen Punkt mit der Kurve C gemein hat, im übrigen ganz ausserhalb derselben liegt, so ist s jedenfalls nicht kleiner als σ.

Demnach liegt die Kurve $s = \alpha$ nicht ausserhalb der Kurve $\sigma = \alpha$. Die Kurve $\sigma = \alpha$ kann nun zwar den Rand an mehreren Stellen durchschneiden, sie muss aber alle die Punkte des Randes, welche zugleich auf dem Polygon Q liegen, in bestimmter, endlicher Entfernung ausschliessen. Denn in diesen Punkten ist $\sigma = 1$. Mithin muss auch die Kurve $\sigma = \alpha$ von diesen Randpunkten eine endliche Entfernung haben. Da nun jeder Punkt des Randes willkürlich zu einem Eckpunkt von Q gemacht werden kann, so hat die Kurve $s = \alpha$ von allen Randpunkten eine endliche Entfernung, solange $\alpha < 1$ ist.

Um zu jedem Randpunkte C den Bereich zu konstruieren, in welchem die Werte von s beliebig wenig von 1 abweichen, hat man also folgendermassen zu verfahren: Es sei $\alpha = 1 - \delta$, man konstruiere die Kurve $s = \alpha$, so ist in allen Punkten der Fläche F, welche ausserhalb dieser Kurve liegen, der Wert von s um weniger als δ von 1 unterschieden.

Sonach ist die Existenz der Greenschen Funktion für eine geschlossene einfach zusammenhängende beliebig berandete Fläche gezeigt. Nach ganz demselben Verfahren wird sie auch bei einer mehrfach zusammenhängenden Fläche erkannt.*

Diese Funktion besitzt die Eigenschaften, welche im § 23 bewiesen wurden.

§ 40.

Mittelst der Greenschen Funktion lässt sich, wie im § 24 angegeben wurde, eine Potentialfunktion, welche im Innern eines Gebietes regulär ist, lediglich durch die Werte ausdrücken, die sie am Rande dieses Gebietes besitzt, nämlich in der Form

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_i}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma'=\sigma} \int U \frac{\partial g_i}{\partial n} d\sigma'.$$

Wir haben aber daselbst die Zulässigkeit der vollzogenen Grenzübergänge noch nicht bewiesen und wollen nun direkt zeigen, dass durch den vorstehenden Ausdruck eine harmonische Funktion für das Innere einer beliebigen Fläche definiert wird, welche am Rande der-

---

* Eine ganz ähnliche Methode wie die, nach welcher hier die Existenz der Funktion g erkannt worden ist, findet sich, wie ich später bemerkte, bei Poincaré (Sur un theorème de la Théorie générale des fonctions; Bullet. de la Société Mathém., 1883), nur dass dort die Untersuchung dadurch leichter wird, dass die Randwerte nicht weiter in Betracht kommen. Der Konvergenzbeweis kann auf Grund meines allgemeinen Satzes einfacher geführt werden, als es dort geschehen ist. Das Prinzip der Erweiterung der Polygone geht von Herrn Schwarz aus.

selben den Wert U hat. Mit diesem Nachweis ist die Konstruierbarkeit einer Potentialfunktion aus ihren Randwerten für eine einfach zusammenhängende (und ebenso für eine mehrfach zusammenhängende) im Endlichen gelegene Fläche mit beliebig gestaltetem Rande erwiesen. Die Randkurve selbst aber muss für diese Untersuchung, da es sich um eine Integration längs des Randes handelt, spezieller als im vorigen Paragraphen angenommen werden: sie muss ein integrierbares Bogenelement $d\sigma$ besitzen. Um weitere Schwierigkeiten zu vermeiden, nehmen wir überdies an, dass bis auf einzelne Ecken oder Spitzen überall eine bestimmte sich stetig ändernde Tangente vorhanden ist, und dass die Funktion $\cos\alpha$, welche die Richtung der Tangente angiebt, keinen Wert unendlich oft annehmen soll, es sei denn, dass sie in einem ganzen Intervall konstant ist.

Wählt man die Länge σ des Bogens, gerechnet von einem festen Punkt, zum Parameter, so lassen sich bei solch einer Kurve die Koordinaten x und y als stetige Funktionen von σ definieren. $x = \varphi(\sigma)$; $y = \psi(\sigma)$. Da keine Doppelpunkte vorkommen sollen, so entsprechen verschiedenen Werten von σ auch immer verschiedene Punkte. Nur zu dem Anfangswert $\sigma = 0$ und dem Endwert $\sigma = \sigma_1$ gehört der nämliche Punkt. Der Kosinus des Winkels, den die in der Richtung wachsender σ konstruierte Tangente mit der positiven Abscissenachse bildet, ist $\cos\alpha = \frac{dx}{d\sigma} = \varphi'(\sigma)$. Diese Funktion wird nicht unendlich und ist der Voraussetzung zufolge stetig bis auf einzelne Stellen, an denen sie eine plötzliche aber bestimmte Wertänderung erleidet. An einer Spitze besteht diese Wertänderung in einer Umkehrung des Vorzeichens. Auch kann diese Funktion nicht unendlich viele Oscillationen besitzen, da sie keinen Wert unendlich oft annimmt. Dieselben Eigenschaften bestehen auch für die Funktion: $\cos\beta = \frac{dy}{d\sigma} = \psi'(\sigma)$, durch welche der Winkel zwischen der nämlichen Richtung der Tangente und der positiven Ordinatenachse gemessen wird, und überdies ist $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$.

Solch eine geschlossene Kurve hat geometrisch folgende Eigenschaft: Eine jede Gerade, welche die Kurve schneidet, schneidet sie nur in einer endlichen (geraden) Anzahl von Punkten (es sei denn, dass sie eine ganze Strecke mit der Kurve gemein hat), denn wählt man die Gerade zur Abscissenachse (was von einer Richtung gilt, gilt auch von allen übrigen), so muss zwischen je zwei Schnittpunkten mindestens ein Punkt vorhanden sein, in welchem die Ordinate y, welche stetig von 0 zu 0 variiert, einen Maximalwert erlangt. Dieser

Punkt ist entweder eine Ecke resp. Spitze, oder ein Punkt, in welchem die Tangente parallel der schneidenden Linie ist. Da weder das eine noch das andere unendlich oft eintreten kann, so kann es auch nicht unendlich viele Schnittpunkte geben.

Die Funktion U soll vorläufig eine durchaus eindeutige und stetige Funktion der Randpunkte, also des Parameters σ sein.

Der erste Teil des obigen Ausdruckes stellt nun eine harmonische Funktion dar, welche bei Annäherung an einen regulären Randpunkt s nach dem Wert

$$\frac{1}{2}U + \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}P$$

konvergiert, und bei Annäherung an einen Eckpunkt mit der Winkelöffnung α nach dem Wert

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)U + \frac{1}{2}P.$$

Mithin ist zu zeigen, dass durch die Form $\frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma'=\sigma}\int U\frac{\partial g}{\partial n}d\sigma'$ eine harmonische Funktion definiert wird, die bei Annäherung an einen Randpunkt s stetig in den Wert $-\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}P$, resp. in den Wert $-\frac{\alpha}{2\pi}U + \frac{1}{2}P$ konvergiert.

Das Integral, um welches es sich hierbei handelt, werde folgendermassen definiert. An Stelle der Randkurve C betrachte man eine andere geschlossene, innere Kurve C', die in beliebiger Nähe des Randes verläuft, und deren Punkte im allgemeinen eindeutig auf die Punkte der Kurve C bezogen sind, derart, dass die entsprechenden Punkte beider Kurven zusammenfallen, wenn die Kurve C' beliebig nahe an die Kurve C heranrückt. Auf dieser neuen Kurve C' verteile man die Werte der stetigen Funktion U so, dass in einem Punkt der Kurve C' der Wert von U der nämliche ist, wie in dem entsprechenden Punkt der Kurve C.

Eine Kurve C' dieser Art kann man z. B. in folgender Weise herstellen: Man ziehe das System von Geraden, welches einer Richtung z. B. der Ordinatenachse parallel ist, und schneide jedesmal von dem Punkte aus, in welchem die Gerade den Rand trifft, eine konstante, beliebig kleine Strecke δ auf der Geraden nach der Innenseite der Fläche ab. Der Ort aller dieser Punkte liefert eine Kurve C' der verlangten Art, und hat im allgemeinen die Gleichung $x' = \varphi(\lambda)$, $y' = \psi(\lambda) \pm \delta$. Nur bei Annäherung an solche Gerade, welche die

Kurve tangieren (oder bei denen zwei Schnittpunkte in eine Ecke resp. Spitze zusammenrücken) muss man in der Umgebung des Berührungspunktes etwas anders verfahren. Berührt die Gerade die Kurve von aussen, so giebt es in ihrer Nähe eine parallele Gerade, auf welcher die beiden, der Kurve C' angehörigen Punkte zusammenrücken, diejenige nämlich, auf welcher die beiden Schnittpunkte mit C die Entfernung 2δ voneinander haben. Mithin schliesst sich die Kurve C' bereits in diesem Punkt, der zugleich ein Eckpunkt wird; derselbe soll dann auch allen weiteren Punkten C, welche in der Umgebung des Berührungspunktes liegen, entsprechen. Die Funktion U erleidet dann auf der Kurve C' eine plötzliche Wertänderung, die aber beliebig klein ist, wenn C und C' zusammenrücken. Berührt die Gerade des Parallelsystems die Kurve auf der Innenseite, so entsprechen dem Berührungspunkt zwei verschiedene Punkte auf C'; um die Kurve C' zwischen diesen Punkten zu schliessen, verbinde man dieselben mit einem beliebig kleinen Bogen, der ganz im Innern von C gelegen ist. Allen Punkten dieses Bogens entspricht nur e i n Punkt auf der Kurve C, und der Wert von U ist auf diesem Bogen konstant. Die Kurve C' ist eine zu C parallele Kurve, weil $dx' = dx$, $dy' = dy$. Abgesehen von den beiden Arten von Ausnahmestellen sind entsprechende Bogen von C und C' gleich lang, denn sie sind durch Parallelverschiebung aufeinander bezogen, und C' hat nur da Ecken resp. Spitzen, wo der entsprechende Punkt von C eine Ecke oder Spitze ist. Das Bogenelement der Kurve C' heisse $d\sigma'$.

Man bilde die harmonische Funktion u'_2, welche in jedem Punkt O der Fläche durch das Integral

$$u'_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{c'} U \frac{\partial g}{\partial n'} d\sigma'$$

definiert ist. Dabei soll g die zum Punkt O gehörige G r e e n sche Funktion für die von der Kurve C umschlossene Fläche F sein; $\frac{\partial g}{\partial n'}$ aber die Ableitung dieser Funktion, g e b i l d e t l ä n g s d e r K u r v e C' nach der inneren Normalen. Ebenso erstreckt sich die Integration nicht über die Randkurve C, sondern über die Kurve C'. Dass die Funktion u'_2 eine harmonische Funktion ist für alle inneren Punkte der Fläche F, ist evident. Denn betrachtet man den Wert von g in einem Punkt der Kurve C' als Funktion der Koordinaten ξ, η, des Punktes s' und der Koordinaten x, y des Punktes O, so ist der Wert $g(\xi, \eta, x, y)$ darstellbar als diejenige G r e e n sche Funktion, welche zum Pol ξ, η gehört, also gleich $g(x, y, \xi, \eta)$. Stellt man diese letztere

Funktion in der Umgebung des Punktes xy durch ihre Fouriersche Reihe dar, indem man xy zum Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems r, φ wählt, so sind die Koeffizienten dieser Reihe bestimmte Integrale, die sich in der Umgebung des Punktes ξ, η als Potenzreihen der Koordinaten ξ, η darstellen lassen. Mithin sind auch alle gemischten Ableitungen, wie $\frac{\partial^3 g}{\partial \xi \partial x^2}, \frac{\partial^3 g}{\partial \eta \partial x^2}$ u. s. w. reguläre Funktionen in der Umgebung der Stellen x, y, ξ, η, und folglich wird

$$\frac{\partial^2 u'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_2}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) d\sigma' = 0.$$

Nun ist zu untersuchen, welche Grenzwerte U'_2 diese Funktion in den Punkten des Randes C besitzt. Lässt man den Punkt O in einen Randpunkt — er heisse s — rücken, so geht die Greensche Funktion, sowie ihre Ableitung in den Punkten der inneren Kurve C' gleichmässig stetig in den Wert $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ über, wobei ϱ die Entfernung des Punktes s von den Punkten der Kurve C' bedeutet (§ 23). Es ist also für die Punkte des Randes C

$$\lim u'_2 = U'_2 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma'.$$

Wenn die Parallelkurve C' immer näher an den Rand C konstruiert wird, so ändern sich die Werte der harmonischen Funktion u'_2, sowie ihre Randwerte U'_2. Es soll der Grenzwert bestimmt werden, den U'_2 bei diesem Prozesse erhält.

Zu dem Zwecke fixiere man auf der Randkurve C einen beliebig kleinen Bogen σ_1, in dessen Innern der Randpunkt s liegt. Auf diesem Bogen σ_1 sollen die Werte der stetigen Funktion U um weniger als eine beliebig kleine Grösse ε voneinander differieren. Errichtet man in den Endpunkten dieses Bogens die Parallelen, so schneiden sie auf der Parallelkurve C' einen Bogen σ'_1 aus, dessen Punkte den Punkten von σ_1 entsprechen. Die übrigen Teile von C und C' seien mit σ_2 und σ'_2 bezeichnet. Das Integral U'_2 zerlegt sich in zwei Teile, von denen sich der eine auf σ'_1, der andere auf σ'_2 bezieht; es ist

$$U'_2 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma'_1 + \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma'_2.$$

Wenn nun die Kurve C' immer mehr an die Kurve C heranrückt, durch Verkleinerung ihres Abstandes δ, so gehen im zweiten Integral die Werte von ϱ gleichmässig stetig in die Werte über, welche die

Entfernungen des Punktes s von den Punkten des Bogens σ_2 ausdrücken; also ist

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma'_2 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2 = \frac{1}{2\pi}\int U\,(d\sigma_2)_s.$$

Dieser Übergang ist auch ein gleichmässiger in Bezug auf alle Randpunkte s, d. h. hat man jeden Randpunkt s mit einem Bogenstück σ_1 umschlossen, so wird die Kurve σ' so fixiert werden können, dass sich bei allen Werten von s der Wert von $\frac{1}{2\pi}\int U\,(d\sigma_2)_s$ nur noch beliebig wenig von dem Wert $\frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma'_2$ unterscheidet. Denn die Funktion $\frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ ist eine stetige Funktion ihrer Argumente. (Es gilt dies auch für die besonders konstruierten Ausnahmepunkte; die beliebig kleinen Bögen, die man bei innerer Berührung eingeführt hat, können so konstruiert werden, dass auf denselben die Integralwerte überhaupt beliebig klein werden.)

Das andere Integral hat den Wert

$$\frac{1}{2\pi}\int U\,(d\sigma'_1)_s.$$

Bezeichnet man mit U_s den Wert von U im Punkte s und beachtet, dass die Werte von U längs des Bogens σ_1 also auch σ'_1 um weniger als ε voneinander differieren, so kann man dieses Integral gleich setzen:

$$\frac{1}{2\pi} U_s \int (d\sigma'_1)_s \pm \left(< \varepsilon \frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma'_1)_s\right).$$

Es ist aber $\int (d\sigma'_1)_s$ gleich dem negativen Winkel, unter welchem das Bogenelement σ'_1 vom Punkte s aus erscheint. Dieser Winkel werde mit β' bezeichnet; also ist der vorstehende Wert gleich

$$-\frac{\beta'}{2\pi} U_s \pm \left(< \varepsilon \frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma'_1)_s\right).$$

Lässt man die Kurve C' an die Kurve C beliebig heranrücken, so geht β' in den Winkel über, welchen die vom Punkte s an die Endpunkte des Bogens σ_1 gezogenen Linien miteinander bilden, und zwar in denjenigen Scheitelwinkel, der dem Innern der Fläche F zugekehrt ist. Bezeichnet man diesen Winkel mit β, so ist

$$\lim U'_2 = -\frac{\beta}{2\pi} U_s \pm \left(< \varepsilon \lim_{\sigma'=\sigma} \frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma'_1)_s\right) + \frac{1}{2\pi}\int U\,(d\sigma_2)_s.$$

Indem man nun den Bogen σ_1 beliebig klein werden lässt, geht β in den Wert π über, wenn s ein regulärer Randpunkt, und in den Wert α, wenn s ein Eckpunkt mit der Winkelöffnung α ist; ferner konvergiert ε nach null, und $\int \operatorname{abs}(d\sigma'_1)_s$ bleibt endlich, weil unendlich viele Wendungen auf jedem Bogenstück ausgeschlossen sind; endlich wird (§ 10):

$$\lim_{\sigma_2 = \sigma} \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma_2)_s = \frac{1}{2\pi} \int U (d\sigma)_s.$$

Sonach erkennt man, dass

$$U_2 = \lim U'_2 = -\frac{1}{2} U_s + \frac{1}{2} P, \quad \text{resp.} \quad = -\frac{\alpha}{2\pi} U_s + \frac{1}{2} P$$

ist. Der Übergang von U'_2 in diesen Grenzwert U_2 ist für alle Randpunkte s ein gleichmässiger, d. h. zu jeder vorgeschriebenen beliebig kleinen Zahl η lässt sich eine Lage der Kurve C' angeben, so dass die Werte der Funktion U'_2, welche von dieser Kurve geliefert werden, sich allenthalben auf C um weniger als η von U_2 unterscheiden. Denn es ist

$$U'_2 = -\frac{\beta'}{2\pi} U_s \pm \left(< \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{abs}(d\sigma'_1)_s\right) + \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial}{\partial n'} l\left(\frac{1}{\varrho'}\right) d\sigma'_2,$$

$$U_2 = -\frac{\beta}{2\pi} U_s \pm \left(< \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{abs}(d\sigma'_1)_s\right) + \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial}{\partial n} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\sigma_2.$$

Man kann nun zuerst σ_1 so klein wählen, dass ε beliebig klein wird, und folglich

$$\varepsilon \left(\frac{1}{2\pi} \int \operatorname{abs}(d\sigma'_1)_s + \frac{1}{2\pi} \lim \int \operatorname{abs}(d\sigma'_1)_s\right) < \frac{\eta}{3}$$

wird; ferner kann man den Abstand δ der Kurve C' von der Kurve C so klein wählen, dass der Unterschied der Winkel β' und β dem Betrage nach kleiner wird als $\frac{\eta}{3}$. Denn es misst β den Winkel, unter welchem die zum Bogen σ_1 gehörige Sehne von s aus erscheint, während β' der Winkel ist, welcher zu der um das Stück δ parallel verschobenen Sehne gehört, deren Endpunkte stets eine angebbare endliche Entfernung von s haben. Nennt man diese Entfernung a, so ist der Unterschied zwischen β' und β überall dem Betrage nach kleiner als $2 \arcsin \frac{\delta}{a}$. Desgleichen ist in den letzten Integralen der obigen Ausdrücke ϱ die Entfernung des Punktes s von einem Kurvenpunkt x, y, während ϱ' die Entfernung desselben Punktes s von dem Punkte $x, y + \delta$ bedeutet, und weder ϱ noch ϱ' werden längs

σ_2 und σ'_2 zu null. Dass auch die besonders konstruierten Stücke der Kurve C' diese Vergleichungen nicht beeinflussen, ist ohne Schwierigkeit zu erkennen. Denn hat man für die Umgebung eines Randpunktes s, der zu einer singulären Behandlung Anlass gab, den Bogen σ_1 der ersten Forderung gemäss angenommen, so wird die zu diesem Bogen gehörige Sehne (resp. ihre Verlängerung), die wir parallel der Verschiebungsrichtung wählen können, von den Kurven C' in zwei Punkten geschnitten, die mit Verkleinerung von δ nach den Endpunkten der Sehne konvergieren. Daraus lässt sich wiederum einsehen, dass man den Wert δ so klein fixieren kann, dass für alle Punkte s, die innerhalb σ_1 liegen, der Winkel, unter welchem die zu σ_1 gehörige Sehne erscheint, beliebig wenig von dem Winkel β' sich unterscheidet, der zu der Sehne des Bogens σ'_1 gehört. Die gleichmässige Konvergenz von U'_2 in U_2 besteht sonach, wie man hieraus ersieht, unabhängig von den Werten U, in der Umgebung aller Stellen, an denen U_s, wie vorausgesetzt wurde, stetig ist.

Hieraus folgt, dass die Funktion $u_2 = \lim\limits_{\sigma' = \sigma} \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial g}{\partial n'} \, d\sigma'$ eine harmonische Funktion ist, die stetig in die Randwerte U_2 übergeht. Denn wir können dem im § 20 bewiesenen Satze allgemein die folgende Fassung geben: Ist für eine Fläche eine unendliche Folge von harmonischen Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots u^{(n)}, \ldots$ gegeben, deren Randwerte $U_s^{(1)}, U_s^{(2)}, \ldots U_s^{(n)}, \ldots$ stetige Funktionen sind, welche gleichmässig nach einer Funktion U_s konvergieren, so konvergiert auch die Folge der harmonischen Funktionen $u^{(1)}$ nach einer harmonischen Funktion u, welche gleichmässig in die Randwerte U_s übergeht.

Für die Fläche F ist sonach erstlich eine harmonische Funktion u_1 konstruiert worden, mit den Randwerten

$$\frac{1}{2} U + \frac{1}{2} P, \quad \text{resp.} \quad \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) U + \frac{1}{2} P,$$

sodann eine harmonische Funktion u_2 mit den Randwerten

$$-\frac{1}{2} U + \frac{1}{2} P, \quad \text{resp.} \quad -\frac{\alpha}{2\pi} U + \frac{1}{2} P,$$

also ist

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial T}{\partial n} \, d\sigma - \lim_{\sigma' = \sigma} \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial g}{\partial n'} \, d\sigma'$$

eine harmonische Funktion für das ganze Innere von F, welche stetig in die vorgeschriebenen Randwerte U übergeht. Diese Funk-

tion ist die einzig mögliche, welche zu diesen Randwerten gehört (§ 22).*

§ 41.

Bevor wir unsere Untersuchungen weiter ausdehnen auf solche Fälle, wo U eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, ist ein allgemeiner Satz über die Eindeutigkeit der Bestimmung einer Potentialfunktion zu beweisen, der Satz nämlich, welcher im § 34 nur für die dort behandelte besondere Art von Randkurven erledigt ist. Es lässt sich aber auch die daselbst angewandte Methode des Beweises benutzen.

Wenn eine harmonische Funktion u zu beiden Seiten einer Randstelle s stetig nach Werten U konvergiert, die selbst eine stetige Funktion auf dem Rande bilden und in s den Wert U_s haben, während das Verhalten von u beim Übergang in die betreffende Randstelle fraglich ist, jedoch so, dass die Funktion daselbst jedenfalls endlich bleibt, so konvergiert dieselbe auch an dieser Stelle nach dem Werte U_s und ist in der Umgebung der Stelle durchaus stetig.

Die betreffende Randstelle soll zunächst keine Ecke oder Spitze sein, vielmehr soll die Kurve daselbst überall eine sich stetig ändernde Tangente besitzen. Doch kann die Kurve auch konvex nach innen liegen, sowie Wendepunkte besitzen. Zu beiden Seiten der Stelle trage man ein beliebig kleines Bogenstück ab; die Endpunkte dieser Stücke verbinde man durch eine beliebige Kurve ohne Ecken und Spitzen, die im Innern der gegebenen Fläche verläuft. In dieser neugebildeten Fläche besitzt die harmonische Funktion u bestimmte stetige Werte, auch am Rande ist sie überall stetig, mit Ausnahme des Punktes s in dessen Umgebung das Verhalten unbekannt, jedoch ein endliches ist. Man kann nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen eine harmonische Funktion u' konstruieren, welche überall stetig ist und die nämlichen Randwerte besitzt; an der Stelle s konvergiert diese Funktion stetig nach dem Werte U_s. Es ist zu zeigen, dass die Differenz $u - u'$ gleich null ist. Also ist folgender, im Vergleich zum obigen einfacherer Satz zu beweisen.

Wenn eine harmonische Funktion v auf dem Rande, der keine Ecken und Spitzen hat, allenthalben den Grenzwert null besitzt und

* Die vorstehende Formel ist deshalb von besonderem Wert, weil die Betrachtungen, mittels deren sie bewiesen ist, auch für die Potentialfunktionen im Raume in analoger Weise gelten. Bei der Formel im nächsten Paragraphen, welche sich auf analytische Begrenzungen bezieht, ist diese Übertragung nicht möglich, solange nicht ein analoger Satz über die Fortsetzbarkeit einer Potentialfunktion zu beiden Seiten einer analytischen Fläche bewiesen ist, was eine bisher noch ungelöste Aufgabe ist.

mit Ausnahme eines Randpunktes, in dessen Umgebung die Funktion nicht näher bestimmt ist, als dass sie endlich, kleiner als eine bestimmte Grösse K bleibt, so ist sie (wenn hebbare Unstetigkeiten ausgeschlossen sind) überall gleich null.

Man umschliesse (wie im § 34) die Randstelle s mit einem beliebig kleinen Bogenstück α und bezeichne mit W die Randfunktion, welche im Bogenstück α den Wert K hat, sonst allenthalben auf dem Rande null ist. Bildet man nun das Integral

$$w = \frac{1}{\pi} \int W \, (d\sigma)_x,$$

so stellt dasselbe eine harmonische Funktion dar, mit den Randwerten $W + P$, wobei P in jedem Randpunkt s den Wert hat

$$P = \frac{1}{\pi} \int W \, (d\sigma)_s = \frac{1}{\pi} K \int (d\alpha)_s.$$

Die Grösse P braucht nun nicht mehr überall positiv zu sein, aber ihr Betrag wird beliebig klein, wenn man das Bogenstück α beliebig verkleinert. Denn für einen Punkt s, der ausserhalb des Bogens α liegt, stellt $\int (d\alpha)_s$ (mit positivem oder negativem Vorzeichen) den Winkel dar, unter welchen das Stück α von s aus gesehen wird. Für einen Endpunkt von α misst dasselbe Integral den Winkel zwischen der Tangente des Punktes und der zum Bogen α gehörigen Sehne. Für einen Punkt s im Innern von α ist der Wert gleich der Summe der Winkel zwischen der Tangente des Punktes und den an die Endpunkte des Bogens führenden Sehnen. Man sieht also ein, dass man, da die Tangenten auf dem Rande sich stetig ändern sollen, α so klein wählen kann, dass für alle innerhalb α gelegenen Punkte der Wert des Integrals beliebig klein wird und dass man weiterhin α so verkleinern kann, dass dasselbe auch für alle ausserhalb gelegenen Punkte eintritt.

Die Differenz $w - v$ ist nun entweder allenthalben positiv, oder wenn sie negativ werden sollte, nicht kleiner als der negative Maximalbetrag von P. Denn in den Randpunkten ausserhalb α ist $W - V = P$, in den Punkten innerhalb α ist $W - V = K + P$, und insbesondere an dem fraglichen Punkt s ist $W - V$ ebenfalls noch grösser als P, weil der Grenzwert von w gleich K ist, während der Betrag von v kleiner als K bleibt. In einem Endpunkt von α ist diese Differenz $\theta K + P$, wobei θ einen echten Bruch bezeichnet. Bezeichnet man den grössten Betrag von P mit δ, so ist

$$w - v > - \delta.$$

Ebenso steht fest, dass

$$- w - v < + \delta.$$

Lässt man α nach null konvergieren, so werden δ und w beliebig klein, also ist auch in allen Punkten $v = 0$.

Wenn aber der fragliche Randpunkt eine Ecke bildet, mit einem Winkel $\lambda\pi$, wobei $0 < \lambda < 2$, und die Tangenten in das Innere der Fläche eintreten, so muss man diesen Fall auf den vorigen durch konforme Abbildung zurückführen, indem man die beiden Tangenten im Eckpunkt in eine Gerade transformiert. Macht man die Ecke zum Anfangspunkt der Koordinaten $z = x + iy$ und nimmt man an, da man es mit einer analytischen Transformation zu thun hat, dass die beiden sich daselbst schneidenden Kurven von analytischem Charakter sind (siehe den folgenden Paragraphen), so verwandelt die Substitution

$$z = \zeta^\lambda \quad \text{oder} \quad r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho^\lambda(\cos\lambda\psi + i\sin\lambda\psi)$$

den Eckpunkt in den Punkt $\varrho = 0$, und die beiden Tangenten $\varphi = 0$ und $\varphi = \lambda\pi$ in die Achse $\psi = 0$ und $\psi = \pi$. Die analytischen Kurven transformieren sich in Kurven, welche die beiden Hälften dieser Achse berühren, die harmonische Funktion $u(x, y)$ geht über in eine harmonische Funktion $u(\xi, \eta)$, welche nur im Nullpunkt einen singulären Punkt hat. Da diese Funktion zu beiden Seiten der Nullstelle stetig bleibt, so ist sie auch nach dem vorigen Satz in der Umgebung der Nullstelle stetig und folglich gilt dasselbe für die ursprüngliche Funktion $u(x, y)$ in der Umgebung der Ecke.

Auch der Fall von Spitzen ($\lambda = 0$ oder $\lambda = 2$) lässt sich durch eine analoge Transformation erledigen. Jedoch ist folgende Betrachtung einfacher.

Für den Fall $\lambda = 0$ betrachte man einen beliebigen Ausschnitt der gegebenen Fläche, der diese Spitze und keine einspringenden Ecken enthält. Man umschliesse dieses Gebiet mit einer neuen Kurve, z. B. mit einem Kreis, der im übrigen ganz beliebig verläuft und nur durch die Spitze hindurchgeht. Wenn man auf diesem Kreise die harmonische Funktion $w = \frac{1}{\pi} K \int (d\alpha)_x$ konstruiert, wobei α einen beliebig kleinen Teil der Peripherie bedeutet, welcher die Spitze umgiebt, so ist w allenthalben grösser als v, und $-w$ allenthalben kleiner als v; da aber w nach null konvergiert, wenn α beliebig klein wird, so ist auch v gleich null.

Wenn $\lambda = 2$ ist, hat man zu unterscheiden, ob die beiden Kurvenzweige auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen oder nicht. Im ersteren Falle verwandelt die Substitution $z = \zeta^2$ die Umgebung der Spitze konform in die Umgebung eines Winkels von der Grösse π; den anderen Fall kann man durch eine andere Art konformer Trans-

formation auf den vorigen zurückführen. Legt man nämlich durch die Spitze eine analytische Kurve, welche zwischen den beiden Kurvenzweigen verläuft, so kann man, wie im nächsten Paragraphen besprochen wird, eine Transformation angeben, durch welche die analytische Kurve in eine Gerade übergeführt wird. Die beiden Kurvenzweige bilden dann eine Spitze zu beiden Seiten dieser Geraden.

Im vorstehenden ist allgemein der Satz, soviel ich weiss zum ersten Mal, bewiesen:

Eine harmonische Funktion ist vollständig bestimmt, wenn ihre Randwerte gegeben sind, auch dann, wenn in einzelnen Punkten des Randes das Verhalten der Funktion unbestimmt gelassen, jedoch gefordert wird, dass sie endlich bleibt.

Sind inbesondere die Randwerte stetig auch zu beiden Seiten der Randpunkte, so muss auch die harmonische Funktion durchaus stetig sein.

Die Randkurve selbst ist beliebig; nur soll sie bis auf einzelne Punkte eine sich stetig ändernde Tangente haben. In der Umgebung dieser singulären Punkte haben wir der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass die Kurvenstücke analytisch sind.

§ 42.

Die Untersuchungen des § 40 lassen sich ausdehnen, indem man annimmt, dass die Funktion U an einzelnen Punkten des Randes eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, indem sie daselbst entweder unbestimmt, jedoch endlich wird oder eine bestimmte sprungweise Wertänderung erfährt. Die Beweise werden indessen umständlich, zumal wenn jene Punkte zugleich Eckpunkte auf dem Rande sind; ich ziehe es daher vor nunmehr die Fälle zu betrachten, wo die Begrenzung von einer analytischen Kurve oder von Stücken solcher Kurven gebildet wird, wobei auch Ecken und Spitzen zugelassen werden und für diese die Aufgabe vollständig zu erledigen.

Eine Kurve heisst eine analytische, wenn die Koordinaten x und y ihrer Punkte durch Reihen definierbar sind, welche nach ganzen positiven Potenzen einer Variabelen t fortschreiten, und zwar soll bei unseren Betrachtungen ein Kurvenpunkt ein regulärer heissen, wenn sich für die Koordinaten in der Umgebung derselben Potenzreihen angeben lassen, bei denen die Ableitungen $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nicht beide zugleich verschwinden. In diesem Falle lässt sich dann auch y durch eine Potenzreihe nach x, oder x durch eine Potenzreihe nach y ausdrücken.

Wenn eine harmonische Funktion längs eines analytischen Kurvenstückes, das keine singulären Punkte enthält, selbst eine analytische Funktion des Parameters t ist, d. h. durch eine nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Reihe definiert ist, so lässt sie sich immer zu beiden Seiten der Kurve fortsetzen oder anders ausgedrückt, das analytische Kurvenstück bildet dann nicht die natürliche Begrenzung der Funktion. Denn setzt man

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad \text{also} \quad x + iy = \varphi(t) + i\psi(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k t^k$$

und erteilt man der Variabelen t komplexe Werte $t_1 + it_2$, so wird durch die Gleichung

$$z = x + iy = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k (t_1 + it_2)^k = \varphi(t_1, t_2) + i\psi(t_1, t_2),$$

solange die Potenzreihe konvergiert, ein Gebiet von Punkten x, y definiert, welches die ursprüngliche Kurve, für die $t_2 = 0$ ist, in seinem Innern enthält.

Zu jedem Wert von $t_1 + it_2$ gehört ein bestimmter Punkt und umgekehrt entspricht auch jedem Punkt nur ein Wert des Parameters, wenn das Gebiet von t_1 und t_2 so eingeschränkt wird, dass innerhalb desselben $\frac{dz}{dt}$ nicht verschwindet. Deutet man t_1 und t_2 als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, so wird durch die obigen Gleichungen ein Gebiet der Ebene x, y konform auf einen Kreis der Ebene t_1, t_2 abgebildet und zwar so, dass der ursprünglich gegebenen Kurve die Gerade $t_2 = 0$, dem Punkte $t_1 = 0,\ t_2 = 0$ der Mittelpunkt des Kreises entspricht. Jede im Innern des Kreises eindeutige harmonische Funktion ist zugleich eine eindeutige harmonische Funktion für das entsprechende Gebiet der xy-Ebene. Die Eigenschaft der konformen Abbildung spricht sich in den Gleichungen aus:

$$i\left(\frac{\partial x}{\partial t_1} + i\frac{\partial y}{\partial t_1}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial t_2} + i\frac{\partial y}{\partial t_2}\right) \quad \text{also} \quad \frac{\partial x}{\partial t_1} = \frac{\partial y}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial t_2} = -\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

und die Eigenschaft der harmonischen Funktion folgt hieraus, weil

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t^2}\right)^2\right]$$

ist. Da nun, wie im § 3 gezeigt wurde, jede harmonische Funktion über den Durchmesser eines Halbkreises fortsetzbar ist, sobald sie auf diesem Durchmesser eine analytische Funktion der Koordinate ist, so ist sie auch zu beiden Seiten der ursprünglichen Kurve definiert.

Man kann dieses Resultat auch ohne konforme Abbildung auf den Kreis beweisen vermittels eines allgemeinen Satzes aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Fr. v. Kowalewsky, Journ. f. Mathem. Bd. 80). Dieser Satz sagt aus, dass man zu jedem analytischen Kurvenstück einen Bereich ausfindig machen kann, welcher dieses Kurvenstück umschliesst und für welches eine harmonische Funktion existiert, die auf dem Kurvenstück vorgeschriebene analytische Werte u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ besitzt. Es folgt hieraus, dass man zu jedem analytischen Kurvenstück ohne singuläre Punkte ein Gebiet angeben kann, welches dieses Kurvenstück in seinem Innern enthält und für welches eine Potentialfunktion v existiert, die auf der Kurve den konstanten Wert $v = 0$ hat. Diese Potentialfunktion ist erst bestimmt, wenn man die Werte vorschreibt, welche die Ableitungen derselben nach der Normalen der Kurve, also $\frac{\partial v}{\partial n}$ besitzen sollen; dieselben müssen nur gleichfalls analytisch definiert sein. Die Kurven $v = \alpha$ bilden demnach ein System von Niveaulinien und $v = 0$ ist die ursprüngliche Kurve. Bestimmt man die rechtwinkligen Trajektorien $w = \beta$ zu diesem System aus den Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

so ist $w = \beta$ ebenfalls eine harmonische Funktion. Führt man an Stelle der Koordinaten x, y die Koordinaten α, β ein, was eindeutig möglich ist innerhalb eines Gebietes, in welchem $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ nicht beide gleichzeitig verschwinden, so wird die partielle Differentialgleichung für jede harmonische Funktion

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0.$$

Hieraus folgt, dass der Satz, welcher vorhin für die Fortsetzung über eine Gerade hinaus benutzt wurde, für jedes analytische Kurvenstück ohne singuläre Punkte giltig ist.

Ein analoger Satz besteht auch für die Potentiale von einfachen Belegungen oder von Doppelbelegungen, den ich, da er für das Folgende nicht weiter benutzt wird, nur kurz anführe.*

---

* Der Beweis ist ausgeführt im Raum von W. Stahl: „Zur Theorie der Potentialflächen“ (Journ. f. Math., B. 79, pag. 268). Vergl. auch Bruns: „Über einen Satz aus der Potentialtheorie“ (Journ. f. Math., B. 81), woselbst der im § 8 bewiesene Satz für den Raum behandelt ist.

Das Potential $u = \frac{1}{2\pi}\int \delta T d\sigma$ ist analytisch fortsetzbar über den mit Masse belegten Rand an allen den Stellen, in deren Umgebung δ eine analytische Funktion von σ ist, und die Randkurve selbst eine analytische Kurve ohne singuläre Punkte. Denn es ist hier in den Punkten des Randes

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial N} = -\delta.$$

Konstruiert man nun für die äussere Umgebung eines Kurvenstückes die harmonische Funktion v, deren Randwert $V = 0$ ist, und deren Ableitung $\frac{\partial V}{\partial N} = \delta$, so ist $u + v$ die analytische Fortsetzung des Potentiales aus dem inneren Gebiet in das äussere, weil diese Funktion auf der Kurve den Wert U hat und ihre Ableitung nach der äusseren Normalen gleich $-\frac{\partial U}{\partial n}$ ist.

Ebenso ist das Potential $u = \frac{1}{2\pi}\int \delta \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma$ unter den gleichen Bedingungen analytisch fortsetzbar, aus dem Innern der Kurve in das Äussere und umgekehrt, weil nach den Sätzen im § 14 das Potential der Doppelbelegung in das einer einfachen Belegung verwandelt werden kann:

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int \delta \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \delta}{\partial N} T d\sigma$$

und diese Belegung $\frac{\partial \delta}{\partial N}$ nach dem vorigen Satze regulär analytisch ist.

Hieraus folgt auch, dass die zugeordnete Funktion

$$P = \frac{1}{2\pi}\int \delta\, (d\sigma)_s$$

in der Umgebung der Stelle s stets eine analytische Funktion von σ ist, wenn δ und die Randkurve daselbst analytisch sind und keine Singularitäten besitzen.

§ 43.

Wird also der Rand einer Fläche von einer analytischen Kurve ohne singuläre Punkte gebildet, so sind auch die Ableitungen der Greenschen Funktion nach der Normalen in den Punkten des Randes regulär, und man kann daher direkt das Integral längs der Randkurve bilden. Also ist

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial T}{\partial n}\,d\sigma - \lim_{\sigma'=\sigma}\frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial g}{\partial n'}\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

diejenige harmonische Funktion, welche stetig nach dem Randwert U konvergiert, falls U selbst, wie vorausgesetzt wurde, überall auf dem Rande stetig ist.

Will man dieses Resultat direkt beweisen, ohne auf die vorigen Grenzbetrachtungen einzugehen, so tritt eine Schwierigkeit ein, auf die ich aufmerksam machen möchte.

Man lasse den Pol der Greenschen Funktion in einen Randpunkt s rücken, indem man diesen mit einem beliebig kleinen Randstück σ_1 umgiebt, in welchem die Schwankungen der stetigen Funktion kleiner sind als δ; die übrigen Randelemente seien $d\sigma_2$. Es wird nun

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_2 + \frac{1}{2\pi}U\int\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_1 \pm \left[< \delta\,\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_1\right];$$

und weil

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_1 = 2\pi - \int\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_2$$

ist, so ist

$$u = U + \frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_2 - \frac{1}{2\pi}\,U\int\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_2 \pm (< \delta).$$

Rückt nun der Pol der Greenschen Funktion in den Randpunkt s, so geht wie früher (§ 23) bewiesen, die Greensche Funktion g in die Funktion T über. Dieser Übergang ist ein gleichmässiger auch für alle Ableitungen der Funktion in allen inneren Punkten der Fläche. Die Kurve σ_2 bildet aber den Rand der Fläche und so kann nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass die obigen beiden Integrale nach null konvergieren. Da nun aber bereits bewiesen ist, dass der Grenzwert von u gleich U wird, so lässt sich hieraus der Satz schliessen: Rückt der Pol der Greenschen Funktion in einen Randpunkt s, so wird auch auf jedem Bogenstück des Randes, welches nicht in unmittelbarer Umgebung von s liegt,

$$\lim\int\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun auch weiter schliessen: Ist U nur eine endliche und integrierbare Funktion, so stellt

$$\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

eine harmonische Funktion dar, welche in der Umgebung aller Stellen, wo U stetig ist, stetig nach dem Randwert U konvergiert.

Sind aber auf der Randkurve singuläre Punkte vorhanden, oder besteht dieselbe aus mehreren verschiedenen analytischen Kurvenstücken, die auch in Ecken aneinander stossen können, so ist die Ableitung $\frac{\partial G}{\partial n}$ in diesen Punkten nicht mehr regulär, sie kann auch unendlich werden, wie das Beispiel des Sektors im § 3 lehrt. Indessen behält doch das Integral

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

einen bestimmten Wert, und ist geführt um die ganze Begrenzung gleich 2π. Um dieses einzusehen, denke man sich eine im Innern der Fläche verlaufende Niveaulinie, auf welcher also die Funktion $T-g$ einen konstanten Wert $a>0$ hat. Bestimmt man nun in jedem regulären Punkt des Randes die orthogonale Trajektorie, so schneidet jede derselben die innere Niveaulinie in einem Punkt. Denn ein und dieselbe Trajektorie kann weder eine innere Niveaulinie noch auch den Rand in zwei verschiedenen Punkten treffen, weil sonst das Integral

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma,$$

geführt über das betreffende Stück der Niveaulinie den Wert null hätte, da es auf der Trajektorie null ist. Auf diese Weise sind also Stücke der inneren Niveaulinie eindeutig bezogen auf Stücke des äusseren Randes, und das vorstehende Integral hat geführt längs des Stückes auf der einen Kurve den nämlichen Wert wie auf dem entsprechenden Stück der anderen. Daraus folgt, indem man sich einem singulären Punkt auf dem Rand beliebig nähert, dass das Integral auch auf dem Rand einen endlichen Wert behält. Es fragt sich nur, ob der totale Wert des Integrales gleich 2π oder kleiner als 2π wird. Letzteres würde der Fall sein, wenn einem singulären Punkt des Randes nicht nur ein Punkt auf der Niveaulinie, sondern ein ganzes Bogenstück entspräche. Diese Möglichkeit, aus welcher folgen würde, dass die zu g gehörige konjugierte Funktion nicht mehr auf dem Rande stetig ist, wird durch den Satz ausgeschlossen, welcher im § 17 für den Kreis und alle Flächen, deren Teile sich auf einen Kreis abbilden lassen, bewiesen ist.

Für beliebige analytische Begrenzungen aber, bei welchen die Möglichkeit der konformen Abbildung erst nachgewiesen werden soll, ergiebt sich ein genauer, wenn auch indirekter Beweis auf folgendem Wege: Alle singulären Punkte auf dem Rande denke man sich durch beliebig kleine Bogenstücke eingeschlossen, deren Elemente $d\alpha$ heissen

mögen. Es wird nun eine durchaus stetige Randfunktion U angenommen, welche in diesen Bogenstücken den Wert null, ausserhalb derselben beliebige Werte hat. Die zugehörige harmonische Funktion ist nun nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen definierbar durch die Gleichung

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma' = \sigma} \frac{1}{2\pi} \int U \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma$$

und wird nun auch gleich gesetzt werden können:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U \left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma,$$

weil alle die Stellen, an denen $\frac{\partial G}{\partial n}$ irregulär wird, bei diesem Integrale nicht in Betracht kommen, denn es hat U in der Umgebung derselben den Wert null. Sucht man wiederum den Randwert dieser Funktion direkt zu bestimmen, so wird wie vorhin

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U \left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_2 + \frac{1}{2\pi} U \int \left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_1 \pm (< \delta).$$

Lässt man den Pol der Greenschen Funktion nach s konvergieren, so muss, weil der Grenzwert von U nur von der Beschaffenheit der Funktion U in unmittelbarer Umgebung des Wertes an der Stelle s abhängig ist:

$$\lim \frac{1}{2\pi} \int U \left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_2 = 0,$$

und

$$\lim \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_1 \text{ beliebig wenig von } 1$$

verschieden sein. Daraus folgt: Hat man die singulären Stellen des Randes durch beliebig kleine Bogen ausgeschlossen, so konvergiert auch jetzt noch das Integral

$$\int \left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma$$

für jeden Teil des Randes, der nicht in unmittelbarer Umgebung von s liegt, nach null, wenn der Pol der Greenschen Funktion in den Punkt s rückt. Es fragt sich nur, was aus den Integralen

$$\int \left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\alpha,$$

die sich auf die Umgebung der singulären Stellen beziehen, bei diesem Prozesse wird. Da ihr Wert immer positiv ist, so müssen sie entweder den Grenzwert null annehmen, oder nach einem bestimmten

oder unbestimmten positiven Wert konvergieren. Bezeichnen wir die Elemente $d\sigma_2$ nach Weglassung der Elemente $d\alpha$ mit $d\beta$, so ist

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\beta+\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\alpha+\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_1\leqq 2\pi.$$

Da das erste Integral nach null konvergiert, und das dritte beliebig wenig von 2π unterschieden ist, so ist auch der Betrag von

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\alpha$$

beliebig klein; es konvergiert folglich ebenfalls nach null, wenn der Pol auf die Begrenzung s rückt.

Sonach ist allgemein der Satz bewiesen: Rückt der Pol der Greenschen Funktion in einen Randpunkt s, so konvergiert auf jedem Teil des aus analytischen Kurven zusammengesetzten Randes, welcher nicht in unmittelbarer Umgebung von s liegt, das Integral

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

nach null.

Bildet man nun das Integral

$$u=\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

auf der Randkurve, so definiert es jedenfalls eine harmonische Funktion, wiewohl die Ableitung $\frac{\partial G}{\partial n}$ in den singulären Punkten singulär ist. Denn schliesst man zunächst diese Punkte durch beliebig kleine Bogenstücke aus, und nennt man die Elemente der Randkurve nach Ausschluss derselben $d\sigma'$, so ist

$$u'=\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma'$$

eine harmonische Funktion. Lässt man σ' in σ übergehen, indem man die ausschliessenden Bogenstücke immer mehr verkleinert, so konvergiert u' für jeden Punkt im Innern und zwar beständig wachsend nach dem Wert u. Folglich ist u eine harmonische Funktion (§ 20, Schluss). Bestimmt man die Randwerte von u, so findet man nach den obigen Sätzen für jeden Punkt des Randes mit Ausnahme der singulären den Wert 1. Mithin hat u (§ 41) überall den Wert 1; und es ist

$$2\pi=\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma,\quad\text{also}\quad\int\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Die letzte Formel lässt erkennen, dass die Funktion, welche zur Greenschen konjugiert ist, auch bis in alle Punkte des Randes eindeutig und stetig bleibt. Zugleich ist der Satz bewiesen: Rückt der Pol der Greenschen Funktion in einen Randpunkt s, so wird der Grenzwert des Integrales

$$\int\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\alpha$$

gleich 2π, wenn α einen beliebig kleinen Bogen bezeichnet, der den Punkt s enthält.

Auf Grund dieses Sates erkennt man: Die Funktion

$$u=\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

ist diejenige harmonische Funktion, welche in allen Punkten des Randes nach dem vorgeschriebenen Werte U konvergiert.

Ist die Funktion U an einzelnen Stellen unstetig, indem sie daselbst unbestimmt, jedoch endlich bleibt, oder eine sprungweise Wertänderung erleidet, so stellt auch jetzt noch das obige Integral eine harmonische Funktion dar, die in der Umgebung aller der Stellen, an denen U stetig ist, den Randwert U hat.

Nach dem Satze im § 41 ist dies zugleich die einzige überall endliche Funktion, welche zu diesen Randwerten gehört.

Das Resultat aller dieser Untersuchungen lässt sich also in dem Satz zusammenfassen:

Die Greensche Formel

$$u=\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T}{\partial n}-\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma$$

stellt für eine beliebige, im Endlichen gelegene Fläche, welche von analytischen Kurvenstücken begrenzt ist (auch für eine mehrfach zusammenhängende) die überall endliche harmonische Funktion dar, welche allein zu den endlichen Randwerten U gehört, wenn diese auch in einzelnen Punkten unstetig oder völlig unbestimmt werden.

Dieser Satz lässt sich auch ausdehnen auf Flächen, deren Rand nicht mehr von analytischem Charakter ist. Nur muss man dann Bedingungen aufsuchen, unter denen die Ableitung $\frac{\partial g}{\partial n}$ wenigstens bis auf einzelne Punkte des Randes stetig bleibt. Solch eine Bedingung scheint z. B. die Stetigkeit des ersten und zweiten Differentialquotienten der Randkurve (bis auf einzelne Punkte, Ecken u. s. w.) zu sein.

Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken, können durch konforme Abbildung mittels reciproker Radien ins Endliche gebracht werden, so dass auch für sie, wenn sie von analytischen Kurvenstücken begrenzt sind, die Konstruktion der harmonischen Funktion aus stetigen oder unstetigen Randwerten erwiesen ist (siehe noch § 47).

§ 44.

In Bezug auf das Verhalten der harmonischen Funktion in solchen Fällen, wo U unstetig, auch unbestimmt wird, erkennt man aus der Greenschen Formel, dass der Wert von u stets innerhalb der extremen Werte von U liegt, welche zu der unmittelbaren Umgebung der betreffenden Stelle gehören. Für die genauere Bestimmung ist dagegen dieselbe Formel weniger geeignet. Hat U zu beiden Seiten einer Stelle, die nicht zugleich eine Spitze ist, zwei verschiedene Grenzwerte U' und U'', so lässt sich eine spezielle Funktion konstruieren, welche an der Stelle zu beiden Seiten die Werte U' und U'' auf dem Rande hat. Ist der betreffende Punkt eine Ecke mit der Winkelöffnung α, wobei $0 < \alpha < 2\pi$, so wähle man denselben zum Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems (r, φ), dessen Achse $\varphi = 0$ mit der einen Tangente zusammenfällt, und bilde die harmonische Funktion $U'' + \frac{1}{\alpha}(U'' - U')(\varphi - \alpha)$, dieselbe hat für $\varphi = 0$ den Wert U', für $\varphi = \alpha$ den Wert U''. Nach Subtraktion dieser Funktion von u erhält man eine Funktion u', deren Randwerte auf der Kurve stetig sind, mithin ist u' überhaupt in der Umgebung der betreffenden Stelle stetig, und konvergiert nach null. Daraus folgt, dass der Grenzwert von u auf jedem Strahl, welcher den Winkel γ mit der Tangente $\varphi = 0$ bildet, gleich ist $\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) U' + \left(1 - \frac{\alpha - \gamma}{a}\right) U''$, wie schon im § 34 für eine speziellere Beschaffenheit des Randes gefunden wurde. Dasselbe Verfahren ist auch anwendbar für $\alpha = 2\pi$, falls die Kurvenzweige zu verschiedenen Seiten der Tangente liegen.

Ist jedoch $\alpha = 0$, so mache man die Spitze zum Anfangspunkt eines Koordinatensystemes (r, φ); lassen sich dann die Zweige der Kurve durch Reihen mit wachsenden Potenzen darstellen, deren Anfangsglieder von der Form sind $r = a\varphi^\alpha + \ldots$, $r = b\varphi^\beta + \ldots$, wobei α und β positive Zahlen sind, so kann man durch Subtraktion einer harmonischen Funktion von der Form $v = C\frac{1}{r^\mu}\sin\mu\varphi$ nach geeigneter Bestimmung von C und μ eine Funktion herstellen, welche

in der Umgebung der Spitze stetig ist*. Nur wenn $\alpha = \beta$ und $a = b$ ist, wenn also die Berührung der beiden Zweige miteinander höher ist als ihre Berührung mit der Tangente, versagt diese Regel, denn die Funktion v bekommt auf beiden Zweigen denselben Wert. Man muss dann diesen Fall auf den vorigen dadurch zurückführen, dass man eine analytische Linie durch die Spitze legt, welche mit beiden Kurvenzweigen mindestens die gleiche Berührung hat, wie diese untereinander und alsdann durch konforme Abbildung diese Linie in eine Gerade verwandeln. Desgleichen kann man den Fall, dass $\alpha = 2\pi$ ist und die beiden Kurven auf der nämlichen Seite der Tangente liegen, durch konforme Abbildungen in den früher betrachteten zurückführen.

§ 45.

Die Existenz der harmonischen Funktion lässt sich nun auch für den Fall nachweisen, dass in der beliebig zusammenhängenden Fläche irgend welche Unstetigkeiten vorgeschrieben sind. Die einfachste Aufgabe dieser Art, wenn die Funktion in einem Punkte logarithmisch unendlich werden und dabei am Rande vorgeschriebene Werte besitzen soll, ist durch die Greensche Funktion erledigt. Denn es ist $g - l\left(\frac{1}{r}\right)$ eine Funktion, welche am Rande null, in einem Punkte logarithmisch unendlich wird. Konstruiert man also die überall endliche und eindeutige harmonische Funktion u, welche am Rande die vorgeschriebenen Werte hat, so ist $v = u + g - l\left(\frac{1}{r}\right)$ die gesuchte Funktion. Ebenso ist zu verfahren, wenn die Funktion in mehreren verschiedenen Punkten logarithmisch unendlich werden soll.

Ist ferner die Unstetigkeit in einem Punkt eine algebraische, also gleich

$$\frac{1}{r}(a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta) + \frac{1}{r^2}(a_2 \cos 2\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta) + \ldots \frac{1}{r^n}(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta),$$

so hat man die Werte, welche diese Funktion am Rande besitzt, von den gegebenen in Abzug zu bringen und alsdann die eindeutige harmonische Funktion zu konstruieren, welche zu diesen neuen Randwerten gehört. Addiert man zu derselben die gegebene Funktion, so ist die gesuchte bestimmt.

Dieses Verfahren ist überhaupt anwendbar, wenn die Unstetigkeiten in irgend welchen Bereichen der Fläche durch eindeutige, har-

* Schwarz, Monatsberichte der Akademie zu Berlin. Oktober 1870. S. 777.

monische Funktionen f_1, f_2, ... vorgeschrieben sind, welche die Eigenschaft haben, dass sie sich eindeutig bis über den Rand der Fläche hinaus fortsetzen lassen.

Aber auch in dem allgemeineren Falle, dass dieses mit den Funktionen f_1, f_2 ... nicht möglich sein sollte, lässt sich diese Aufgabe lösen, auf Grund eines allgemeinen Satzes, den man in folgender Form aussprechen kann:

Ist in irgend einem Gebiete A eine Funktion f gegeben, welche bis auf beliebige Unstetigkeitsstellen, die innerhalb des Gebietes liegen und teils Punkte, teils Linien sein können, eindeutig und harmonisch ist und für welche auf einer die Unstetigkeitsstellen umschliessenden Kurve das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma = 0$$

ist, so lässt sich immer eine bestimmte Funktion φ angeben, welche abgesehen von jenen innerhalb A liegenden Unstetigkeitsstellen in der ganzen Ebene, auch im Unendlichen, eindeutig und harmonisch ist und für welche auch die Differenz φ — f im Gebiete A dieselben Eigenschaften hat.

Spezielle Fälle dieses Satzes sind von den Herren Schwarz* und Neumann** bewiesen worden; aber die im wesentlichen identischen Beweise sind so allgemein, dass sie sich direkt übertragen lassen. Der Vollständigkeit halber will ich den Beweis hier kurz angeben und zwar in der von Herrn Schwarz gegebenen Form.

Zunächst nehme man an, dass das Gebiet A von einem Kreise α umschlossen werden kann; so kann man innerhalb desselben noch einen Kreis β angeben, der ebenfalls noch alle Unstetigkeitsstellen einschliesst. Da die obige Integralbedingung erfüllt sein soll, so ist auch auf jedem Kreise zwischen α und β (§ 2, Gleichung 3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\, d\vartheta = \text{const.}$$

Wir machen diese Konstante gleich null, indem wir von f diesen Wert subtrahieren.

Für die Aussenfläche des Kreises β lässt sich nun eine überall endliche, harmonische Funktion u_1 konstruieren, welche auf β die Werte hat, welche die Funktion f daselbst besitzt. Die extremen Werte derselben liegen auf β, und der grösste Betrag derselben ist

* a. a. O. S. 792—794.

** Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale (2. Aufl.), S. 455—461.

also überall kleiner als der grösste Betrag $F^{(\beta)}$, den $f^{(\beta)}$ auf dem Kreise β besitzt. (Im Unendlichen hat diese Funktion den Wert null, § 27 Satz 4.) Die Werte, welche diese Funktion auf dem Kreise α liefert, seien mit $u_1^{(\alpha)}$ bezeichnet; es ist

$$\int_0^{\pi} u_1^{(\alpha)} d\vartheta = 0.$$

Für das ganze Innere des Kreises α bestimme man die harmonische Funktion u_2, welche am Rande α den Wert $u_1^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}$ hat. Es ist auf diesem Kreise

$$\int^{2\pi} u_2^{(\alpha)} d\vartheta = 0 \quad \text{folglich auch} \int_0^{2\pi} u_2^{(\beta)} d\vartheta = 0,$$

d. h. u_2 hat im Mittelpunkt des Kreises den Wert null und also auf dem Kreise β Werte, deren Betrag und deren Schwankung kleiner ist als kD, wenn man mit D die grösste Schwankung unter den Werten $u_1^{\alpha} - f^{(\alpha)}$ bezeichnet (§ 19, Schlusssatz).

Für die Aussenfläche des Kreises β bestimme man nun die überall endliche harmonische Funktion u_3, welche auf β die Werte $u_2^{(\beta)} + f^{(\beta)}$ hat. Es ist

$$\int_0^{2\pi} u_3^{(\beta)} d\vartheta = 0 = \int_0^{2\pi} u_3^{(\alpha)} d\vartheta$$

Der Betrag der Funktion $u_3 - u_1$ ist auf dem Kreise β gleich $u_2^{(\beta)}$ und folglich überall kleiner als kD und die Schwankung derselben ist ebenfalls kleiner als kD.

Bestimmt man dann weiter für das Innere des Kreises α die Funktion u_4, so dass $u_4^{(\alpha)} = u_3^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}$, so ist

$$\int_0^{2\pi} u_4^{(\alpha)} d\vartheta = \int_0^{2\pi} u_3^{(\alpha)} d\vartheta = 0,$$

und der Betrag der Funktion $u_4 - u_2$, sowie die Schwankung derselben ist auf dem Rande α kleiner als kD, also auf dem Rande β kleiner als k^2D.

Fährt man so fort, so wird u_5 eine Funktion für das Äussere des Kreises β von der Eigenschaft, dass der Betrag von $(u_5 - u_3)$ kleiner als k^2D, und dass auch die Schwankung dieser Funktion kleiner als k^2D ist. Ebenso wird $(u_6 - u_4)$ eine Funktion, deren Betrag und Schwankung allenthalben kleiner ist als k^2D, während für $(u_7 - u_5)$ Betrag und Schwankung allenthalben kleiner wird als k^3D.

Bei Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man für das Äussere des Kreises β die unbegrenzt fortsetzbare Reihe von harmonischen Funktionen

$$u_1, u_3, u_5, \ldots u_{2n+1}, \ldots,$$

für welche $(u_3 - u_1) < kD$, $(u_5 - u_3) = k^2 D$, $\ldots (u_{2n+1} - u_{2n-1}) < k^n D$ und ebenso für das Innere des Kreises α die harmonischen Funktionen

$$u_2, u_4, u_6, \ldots u_{2n},$$

für welche

$$(u_4 - u_2) < kD, \quad (u_6 - u_4) < k^2 D, \quad \ldots, (u_{2n} - u_{2n-2}) < k^{n-1} D.$$

Mithin definieren die Reihen

$$u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \ldots (u_{2n+1} - u_{2n-1}) + \ldots$$

und

$$u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \ldots (u_{2n} - u_{2n-2}) + \ldots$$

harmonische Funktionen $u' = \lim u_{2n+1}$ und $u'' = \lim u_{2n}$, und weil

$$u_{2n}^{(\alpha)} = u_{2n-1}^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}, \quad u_{2n}^{(\beta)} = u_{2n+1}^{(\beta)} - f^{(\beta)},$$

so ist die Funktion $u'' + f$ in dem Gebiete zwischen α und β, welches den Funktionen u' und u'' gemeinsam ist, mit u' identisch. Es bildet also $u'' + f$ die analytische Fortsetzung der Funktion u', und sonach ist diese Funktion mit ihrer Fortsetzung die gesuchte; d. h. sie ist überall eindeutig und harmonisch, mit Ausnahme des Innern von β, wo die Differenz $u' - f = u''$ eindeutig und harmonisch ist.

Ist das Gebiet der Funktion f nicht von einem Kreise umschlossen, sondern von einer beliebigen analytischen Kurve, so muss man dasselbe auf einen Kreis konform abbilden (s. Kapitel 5).

Zweien konzentrischen Kreisen α und β, die gleichfalls noch alle Unstetigkeitspunkte umschliessen sollen, mögen dann die analytischen Kurven L_1 und L_2 entsprechen; L_2 liege innerhalb L_1. Da

$$\int \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = 0$$

sein sollte, so ist auch nach einem Satz aus der Theorie der konformen Abbildung (§ 46)

$$\int \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial r} r\, d\vartheta = 0,$$

also wird wiederum

$$\int f^{(\alpha)} d\vartheta = \int f^{(\beta)} d\vartheta = \text{const},$$

und diese Konstante kann so gewählt werden, dass sie den Wert null hat. Für die Aussenfläche der Kurve L_2 und die Innenfläche der Kurve L_1 können nun in derselben Weise wie vorhin die Funktionen u_{2n+1} und u_{2n} konstruiert werden. Dabei bleiben auch die früheren Ungleichungen und Integralrelationen erhalten. Denn die extremen Werte von u_{2n+1} liegen immer auf L_2, die von u_{2n} auf L_1. Da ferner

$u_{2n}^{(\alpha)} = u_{2n-1}^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}$ und $u_{2n+1}^{(\beta)} = u_{2n}^{(\beta)} + f^{(\beta)}$, so erkennt man, indem man jedesmal die Funktion u_{2n+1} auf dem ringförmigen Gebiet zwischen α und β und die Funktion u_{2n} innerhalb des Kreises α betrachtet, dass successive folgt

$$0 = \int u_1^{(\beta)} d\vartheta = \int u_1^{(\alpha)} d\vartheta = \int u_2^{(\alpha)} d\vartheta = \int u_2^{(\beta)} d\vartheta = \int u_3^{(\beta)} d\vartheta = \int u_3^{(\alpha)} d\vartheta \ldots.$$

Denn weil auf jeder Kurve zwischen L_2 und L_1

$$\int \frac{\partial u_{2n+1}}{\partial n} d\sigma = 0$$

ist, so ist auch auf jedem Kreise zwischen β und α (§ 46)

$$\int \frac{\partial u_{2n+1}}{\partial r} r d\vartheta = 0,$$

und hieraus folgt (§ 2, Gleichung 3), dass

$$\int_0^{2\pi} u_{2n+1}^{(\alpha)} d\vartheta = \int_0^{2\pi} u_{2n+1}^{(\beta)} d\vartheta.$$

Mithin gelten auch die Relationen:

$$u_{2n+1} - u_{2n-1} < k^n D, \quad u_{2n} - u_{2n-2} < k^{n-1} D.$$

Damit ist der oben aufgestellte Satz allgemein bewiesen. Aus demselben folgt: Hat man die Funktion φ konstruiert und die Werte Φ ermittelt, welche dieselbe an dem Rande der gegebenen Fläche besitzt, und bestimmt man alsdann die harmonische Funktion v, welche zu den Randwerten $U - \Phi$ gehört, so stellt $v + \varphi$ die gesuchte Funktion dar, welche die Randwerte U und die durch f vorgeschriebenen Unstetigkeiten besitzt.

Auch die Einschränkung, die darin liegt, dass $\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = 0$ sein soll, lässt sich beseitigen. Denn hat dieses Integral einen von null verschiedenen Wert a'_0 auf einer Kurve, welche man im Gebiete A so konstruiert, dass sie alle Unstetigkeitsstellen einschliesst, so wird die Funktion $f_0 = f + a'_0 \, l(r)$ die verlangte Eigenschaft aufweisen; r bedeutet die Entfernung von irgend einem beliebig angenommenen Punkt im Innern der Kurve. Man kann demnach die Funktion φ_0 konstruieren, welche zu f_0 gehört und alsdann mittels der Greenschen Funktion den Ausdruck $v + \varphi_0 - a'_0 \, [(g + l(r)]$ bilden, welcher die vorgeschriebenen Randwerte U hat und innerhalb des Gebietes A ebenso unstetig wird wie $f_0 - a'_0 \, l(r) = f$.

Betrachtet man gleichzeitig die Funktion u und die ihr konjugierte

$$v = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right),$$

so ist dieselbe eine eindeutige Funktion innerhalb einer einfach zusammenhängenden Fläche, dagegen im allgemeinen vieldeutig und zwar mit $n - 1$ Perioden behaftet für eine $n$fach zusammenhängende Fläche. Sind nun innerhalb der Fläche gewisse Gebiete $A_1, A_2, \ldots A_k$ gegeben, für die irgend welche Funktionen $U_1 + iV_1$, $U_2 + iV_2, \ldots U_k + iV_k$ der komplexen Variabelen $x + iy$ definiert sind, welche beliebige Unstetigkeiten haben können, jedoch so beschaffen sein müssen, dass ihre reellen Bestandteile eindeutige Funktionen sind, so folgt aus den vorigen Betrachtungen: Es lässt sich immer eine Funktion $u + iv$ der komplexen Variabelen $x + iy$ angeben, deren reeller Bestandteil am Rande der Fläche vorgeschriebene Werte hat, welche sich innerhalb der Gebiete A_k ebenso verhalten wie die willkürlich gegebene Funktion $U_k + iV_k$ (d. h. die Differenz zwischen $u + iv$ und $U_k + iV_k$ ist daselbst eindeutig, stetig und harmonisch) und deren Perioden sämtlich rein imaginär sind. Sind die Funktionen V_k ebenfalls eindeutig, so besitzt v im allgemeinen $n - 1$ reelle Perioden, andernfalls treten noch die Perioden der Funktionen V_k hinzu. Die Funktion $u + iv$ ist, abgesehen von diesen Periodenwerten, bis auf eine rein imaginäre Konstante bestimmt.

Dieser Satz bildet die Grundlage für die Theorie der konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen.*

---

* Schottky: Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Journ. f. Math. Bd. 83.

Fünftes Kapitel.

Bemerkungen zur Theorie der konformen Abbildung und der Transformation durch reciproke Radien.

§ 46.

Mittels der Greenschen Funktion wird die Abbildung jeder einfach zusammenhängenden, im Endlichen gelegenen, ebenen Fläche auf einen Kreis mit dem Radius 1 ausführbar. Denn bezeichnet O einen beliebigen Punkt im Innern der Fläche, und bildet man die Funktion $u = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - g_0$, so gehört zu derselben eine konjugierte Funktion v. Dieselbe ist eindeutig innerhalb der Fläche F', welche aus F gebildet wird, indem man vom Punkte O bis zum Rande einen beliebigen Schnitt zieht. Die Funktion v ist bis auf eine Konstante bestimmt und hat im Innern von F' folgende Eigenschaften: Bei einem vollständigen Umlauf um den Punkt O ändert sich v um den Wert $\pm 2\pi$; durchläuft man im positiven Sinne eine Niveaulinie der Funktion u, so ist v daselbst eine durchaus abnehmende Funktion $\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\partial u}{\partial n}\right)$; folglich nimmt $u + iv$ in den Punkten der Fläche jeden Wert nur einmal an.

Das Verhalten von v am Rande der Fläche ist von der Beschaffenheit der Randkurve abhängig. Wird dieselbe von Stücken analytischer Kurven gebildet, welche nur einzelne singuläre Punkte enthalten, so ist v auch in allen Punkten des Randes endlich und stetig, und ändert sich bei einem vollständigen Umlauf um den Rand ebenfalls um den Wert 2π (§ 43). Sonach ist

$$\xi + i\eta = e^{-(u+iv)} = \varrho e^{g-iv}$$

eine Funktion, welche im Innern der Fläche jeden komplexen Wert einmal annimmt, dessen Modul kleiner ist als eins, und am Rande der Fläche jeden Wert, dessen Modul gleich 1 ist. Es ist demnach die Fläche auf den Kreis mit den Koordinaten ξ, η und dem Radius 1

eindeutig abgebildet, und zwar konform, solange die Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}$ regulär und nicht gleichzeitig null sind. Die singulären Punkte des Randes bilden sonach die einzigen Ausnahmen.

Jedem Punkt, auch auf dem Rande der Fläche, entspricht ein Punkt der Kreisperipherie und umgekehrt. Letzteres folgt aber nur daraus, dass das Integral

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

auch am Rande der Fläche den Wert 2π hat. Weder in den Aussagen von Riemann noch von Hrn. Schwarz wird diese Eigenschaft bewiesen.

Da die Funktion v nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, so kann einem bestimmten Punkte des Randes noch irgend ein Punkt der Kreisperipherie zugeordnet werden.

Ist die Randkurve überhaupt nicht analytisch, so ist durch die Existenz der Funktionen u und v zwar erwiesen, dass jedem Punkt im Innern von F ein Punkt im Innern des Kreises konform entspricht, dagegen lässt sich nicht ohne weiteres behaupten, dass auch jedem Punkte des Randes von F ein Punkt der Kreisperipherie eindeutig und mit konformer Umgebung zugeordnet ist.*

Durch Vermittelung eines Kreises können also zwei beliebige, einfach zusammenhängende (von analytischen Kurvenstücken begrenzte) ebene Flächen konform aufeinander abgebildet werden, so dass die Punkte der Ränder sich eindeutig entsprechen. Dabei lassen sich zwei innere Punkte und zwei Punkte des Randes einander willkürlich zuordnen.

Sind zwei Gebiete (x, y) und (ξ, η) aufeinander konform abgebildet, und ist $u(x, y)$ eine harmonische Funktion, so ist die Funktion $u'(\xi, \eta)$, welche aus dieser durch Transformation hervorgeht, ebenfalls harmonisch. Zwischen den beiden Funktionen bestehen die Relationen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

also

* Dasselbe ist auch hinsichtlich der Sätze über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen zu bemerken. Die Sätze, von denen man dort auszugehen hat (siehe Schottky a. a. O.), basieren ebenfalls auf bestimmten Annahmen über die Ableitungen nach der Normalen und gelten ohne weiteres nur, wenn die Randkurven aus Stücken analytischer Kurven mit einzelnen singulären Punkten bestehen.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx\right) = \frac{\partial u'}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx\right) + \frac{\partial u'}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} dy - \frac{\partial \eta}{\partial y} dx\right)$$

$$= \frac{\partial u'}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial u'}{\partial \eta} d\xi,$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{\partial u'}{\partial n'} d\sigma',$$

wenn $d\sigma$ ein beliebiges Bogenelement, n die Richtung der Normalen desselben, und $d\sigma'$ und n' die entsprechenden Elemente in der andern Fläche bezeichnen.

Um die Fläche F auf eine Halbebene ($\eta > 0$) abzubilden, muss eine Funktion konstruiert werden, welche am Rande von F nur reell ist, in einem Punkt des Randes unendlich wird und jeden komplexen Wert mit positivem imaginärem Bestandteil nur einmal annimmt. Eine Funktion dieser Art ist

$$\zeta = \xi + i\eta = i\,\frac{1 + e^{-(u+iv)}}{1 - e^{-(u+iv)}} = i\,\frac{1 + \varrho e^{g-iv}}{1 - \varrho e^{g-iv}}.$$

Dem Punkte $\varrho = 0$ entspricht hierbei der Punkt $\eta = i$; dem Randpunkt $v = 0$ der Unendlichkeitspunkt.

Alle Funktionen, welche am Rande der Fläche reelle Werte und im Innern derselben den Charakter rationaler Funktionen haben, sind rationale Funktionen von $\xi + i\eta$ mit reellen Koeffizienten.

Jede reelle harmonische Funktion, welche am Rande der Fläche vorgeschriebene Werte U erhält, kann nun auch dadurch gewonnen werden, dass man die entsprechende Funktion konstruiert, welche am Rande der Halbebene die Werte U besitzt. Ist O' ein beliebiger Punkt im Innern von F, und $l\left(\frac{1}{\varrho'}\right) - g_{0'}$ die zugehörige Funktion, so ist der Wert von u im Punkte O' gleich

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial l\left(\frac{1}{\varrho'}\right)}{\partial n} - \frac{\partial G_{0'}}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Man konstruiere für die Halbebene ξ, η diejenige Funktion, welche aus $l\left(\frac{1}{\varrho'}\right) - g_{0'}$ durch Transformation gewonnen wird. Sind ξ_0, η_0 die Koordinaten des Punktes, welcher dem Punkt O' entspricht, so lässt sich in der Halbebene zunächst die Funktion leicht ermitteln, welche im Punkt ξ_0, η_0 und nur in diesem null wird, am Rande Werte mit dem Modul 1 hat, und in der oberen Halbebene nicht unendlich wird.

Diese Funktion ist bestimmt bis auf einen konstanten Faktor mit dem Modul 1, und abgesehen von diesem Faktor von der Form

$$\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta'_0},$$

wenn ζ'_0 den konjugierten Punkt zu ζ_0 bedeutet.* Also wird

$$l\left(\frac{1}{\varrho'}\right) - g_{0'} = - l \bmod \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta'_0},$$

und folglich ist längs des Randes der Fläche F

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{l\left(\frac{1}{\varrho'}\right) - g_{0'}\right\} d\sigma = \frac{2\eta_0 \, d\xi}{(\xi - \xi_0)^2 + \eta_0{}^2},$$

also:

$$u = \frac{1}{\pi}\eta_0 \int U(\xi) \frac{d\xi}{(\xi - \xi_0)^2 + \eta_0{}^2}.$$

Sonach ist zur Darstellung jedweder Potentialfunktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet nur die Bestimmung einer e i n z i g e n Funktion g erforderlich.

§ 47.

Flächen, welche sich ins Unendliche erstrecken, werden durch Transformation mittels reciproker Radien in endliche verwandelt, indem man den Pol der Transformation ausserhalb der gegebenen Fläche annimmt. Wird z. B. die Fläche F von der Aussenfläche einer Kurve C gebildet, welche den Nullpunkt umschliesst (die Fläche kann überdies noch beliebig geschlossene Randkurven besitzen), so verwandelt die Transformation

$$\xi + i\eta = \frac{1}{x + iy} \quad \text{oder} \quad x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

dieselbe in eine im Endlichen gelegene Fläche F. Hat man für die Fläche F das Potential γ der natürlichen Belegung konstruiert, welches auf allen Randkurven den konstanten Wert Γ hat und im Unendlichen sich verhält wie $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ (§ 27), so erhält man in der Bildfläche F' durch Transformation diejenige Funktion, welche am Rande den konstanten Wert Γ hat und im Nullpunkt negativ logarithmisch unendlich wird. Bezeichnet man also die G r e e n sche Funktion, welche zum Nullpunkt gehört, mit g', die Entfernungen von dem nämlichen Punkt mit ϱ', so ist

$$\gamma = -\left[l\left(\frac{1}{\varrho'}\right) - g'\right] + \Gamma.$$

* C h r i s t o f f e l: Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Annali di Mat. S. II. T. I.

Ist für die Fläche F eine überall endliche Potentialfunktion mit den Randwerten U gegeben, so ist der Wert, welchen dieselbe im Unendlichen besitzt, gleich

$$-\frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial \Gamma}{\partial N}d\sigma,$$

und dies ist gleich dem Werte, welchen u im Nullpunkte hat, denn es ist

$$u_0=\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial l\left(\frac{1}{\varrho'}\right)}{\partial n'}-\frac{\partial G'}{\partial n'}\right)d\sigma'=-\frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial \Gamma}{\partial n}d\sigma.$$

Hat man in der Fläche F die Funktion T_a-g_a konstruiert (§ 28), welche am Rande den konstanten Wert $-C_a$ hat, und im Unendlichen negativ logarithmisch unendlich wird, so geht dieselbe bei reciproker Transformation über in eine Funktion, welche am Rande den konstanten Wert $-C_a$ hat, und in zwei Punkten, nämlich im Nullpunkt und dem Punkt a', welcher a entspricht, bezüglich negativ und positiv logarithmisch unendlich wird. Also ist

$$T_a-g_a=(T'_{a'}-g_{a'})-(T'_0-g'_0)-C_a.$$

Mithin ist

$$\begin{aligned}u_a=u_{a'}&=\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T_a}{\partial N}-\frac{\partial G_a}{\partial N}\right)d\sigma\\&=\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T'_{a'}}{\partial n'}-\frac{\partial G_{a'}}{\partial n'}\right)d\sigma'-\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T'_0}{\partial n'}-\frac{\partial G_{0'}}{\partial n'}\right)d\sigma'\end{aligned}$$

diejenige Potentialfunktion, welche im Punkt 0, also auch im Unendlichen den Wert null hat, und am Rande den Wert

$$U-\frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T_{0'}}{\partial n'}-\frac{\partial G_{0'}}{\partial n'}\right)d\sigma'=U+\frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial \Gamma}{\partial N}d\sigma$$

besitzt, wie im § 28 behauptet wurde.

Die einzelnen Integrale, aus denen sich die harmonische Funktion u zusammensetzt:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int U\frac{\partial T}{\partial n}d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial U}{\partial n}T\,d\sigma$$

verwandeln sich bei dieser Transformation in folgender Weise.

Bezeichnet man mit a, b die Koordinaten eines beliebigen Punktes im Innern von F, mit x, y die eines Randpunktes, ist ferner 0 der Pol der Transformation, und wird die Entfernung je zweier Punkte kurz mit (ax), $(0x)$ u. s. w. ausgedrückt, so ist*

---

* Neumann, Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential, S. 366.

$$\frac{(a x)}{\sqrt{(0 x)(0 a)}} = \frac{(\alpha \xi)}{\sqrt{(0 \xi)(0 \alpha)}},$$

wobei die rechte Seite die Koordinaten α, β, ξ, η der transformierten Punkte enthält. Bezeichnet man die Logarithmen der reciproken Entfernungen mit T_{ax} u. s. w., so ist

$$T_{ax} - \frac{1}{2} T_{0x} - \frac{1}{2} T_{0a} = T_{\alpha\xi} - \frac{1}{2} T_{0\xi} - \frac{1}{2} T_{0\alpha}.$$

Mithin ist

$$\int U \frac{\partial T_{ax}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2} \int U \frac{\partial T_{0x}}{\partial n} d\sigma = \int U \frac{\partial T_{\alpha\xi}}{\partial n'} d\sigma' - \frac{1}{2} \int U \frac{\partial T_{0\xi}}{\partial n'} \partial\sigma',$$

und da

$$\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = \frac{\partial U}{\partial n'} d\sigma' \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = \int \frac{\partial U}{\partial n'} d\sigma' = 0 \text{ ist,}$$

so folgt:

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} T_{ax} d\sigma - \frac{1}{2} \int \frac{\partial U}{\partial n} T_{0x} d\sigma = \int \frac{\partial U}{\partial n'} T_{\alpha\xi} d\sigma' - \frac{1}{2} \int \frac{\partial U}{\partial n'} T_{0\xi} d\sigma'.$$

Ist das Gebiet x, y im Endlichen geschlossen, und der Pol 0 ein Punkt ausserhalb desselben, so ist auch die Bildfläche $\xi\eta$ im Endlichen geschlossen, und es wird

$$\int \left(U \frac{\partial T_{0x}}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} T_{0x} \right) d\sigma = \int \left(U \frac{\partial T_{0\xi}}{\partial n'} - \frac{\partial U}{\partial n'} T_{0\xi} \right) d\sigma' = 0.$$

Liegt aber der Punkt 0 innerhalb des geschlossenen Gebietes (xy), so enthält das Gebiet $(\xi\eta)$ den Unendlichkeitspunkt, und es wird

$$\frac{1}{2\pi} \int \left(U \frac{\partial T_{0x}}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n} T_{0x} \right) d\sigma = u_0, \quad \frac{1}{2\pi} \int \left(U \frac{\partial T_{0\xi}}{\partial n'} - \frac{\partial U}{\partial n'} T_{0\xi} \right) d\sigma' = - u_0.$$

Aus der Gleichung $T_{0x} + T_{0\xi} = 0$ folgt noch, dass man die obigen Relationen auch in der einfacheren Form schreiben kann:

$$\int U \left(\frac{\partial T_{ax}}{\partial n} - \frac{\partial T_{0x}}{\partial n} \right) d\sigma = \int U \frac{\partial T_{\alpha\xi}}{\partial n'} d\sigma',$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} (T_{ax} - T_{0x}) d\sigma = \int \frac{\partial U}{\partial n'} T_{\alpha\xi} d\sigma'.$$

§ 48.

Um eine einfach zusammenhängende Fläche, welche den unendlich fernen Punkt enthält, und also von dem äusseren Gebiet einer geschlossenen Kurve σ gebildet wird, direkt auf einen Kreis abzubilden, hat man zu einem beliebigen Punkt a im Innern dieser Fläche die-

jenige Funktion, sie heisse g_a, zu bilden, welche im Unendlichen unendlich wird wie $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ und deren Werte am Rande σ sich nur um eine Konstante von dem Werte $l\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ unterscheiden, wobei ϱ die Entfernungen der Randpunkte vom Punkte a bedeuten. Der Wert dieser Konstanten ist (§ 27):

$$C = \frac{1}{2\pi}\int l\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \Gamma}{\partial N}\,d\sigma + \Gamma = -\gamma_a + \Gamma;$$

γ_a ist der Wert, welchen das Potential der natürlichen Belegung im Punkte a besitzt.

Bildet man nun die Funktion $u = T_a - g_a$, so wird dieselbe nur im Punkte a logarithmisch unendlich, hat am Rande σ den konstanten Wert $\gamma_a - \Gamma$ und ist im Unendlichen null. Führt man einen Schnitt vom Punkte a bis zu einem Randpunkt, so ist auch die konjugierte Funktion v in dieser Fläche eindeutig und stetig. Demnach wird

$$\xi + i\eta = e^{-(u+iv)} = \varrho e^{g_a - iv}$$

eine Funktion, welche am Rande Werte besitzt, deren Modul gleich $e^{\Gamma - \gamma_a}$ ist, und im Innern der Fläche jeden Wert einmal annimmt, dessen Modul kleiner ist als dieser Wert. Sonach ist die Fläche auf den Kreis mit dem Radius $e^{\Gamma - \gamma_a}$ abgebildet; dem Punkte a entspricht der Mittelpunkt des Kreises, dem unendlich fernen Punkt, ein Punkt der in der Entfernung 1 von der Mitte sich befindet.

Soll der unendlich ferne Punkt dem Mittelpunkt des Kreises entsprechen, so hat man nur von dem Potential γ der natürlichen Belegung und der dazu konjugierten Funktion u auszugehen. Die Gleichung

$$\xi + i\eta = e^{+(\gamma + iv)}$$

vermittelt die Abbildung auf einen Kreis mit dem Radius e^{Γ}.

§ 49.

Für geradlinig begrenzte Polygone (deren Seiten sich nicht durchschneiden), lässt sich die Aufgabe, die Aussenfläche des Polygons konform auf eine Halbebene oder einen Kreis abzubilden, direkt lösen, indem man die Methode, welche von Herrn Christoffel für die geschlossene Polygonfläche angewandt wurde, etwas erweitert.* In der z-Ebene sei ein beliebiges Polygon gegeben mit den Eckpunkten $a_1, a_2 \ldots a_n$ und den zugehörigen äusseren Winkeln $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \ldots \lambda_n\pi$.

* Derselbe hat auch dieses Problem in einem Nachtrag zu seiner Arbeit in ähnlicher Weise behandelt: „Sopra un problema proposte da Dirichlet". Annali di M., S. 2, T. IV.

Die Grössen λ sind Werte zwischen 0 und 2, und es ist $\Sigma\lambda = n + 2$. Da die Möglichkeit der konformen Abbildung auf die Halbebene ζ erwiesen ist, wobei einem beliebigen Punkt, z. B. $\zeta = i$ der unendlich ferne Punkt z und einem beliebigen Randpunkt $\zeta = \infty$ ein beliebiger Randpunkt $z = a_0$ zugeordnet werden kann, so können wir behaupten: Es muss sich eine Funktion $z = f(\zeta)$ finden lassen, welche für alle Punkte im Innern der oberen Halbebene $(\eta > 0)$ mit Ausnahme des Punktes $\zeta = i$, durchaus eindeutig und regulär ist, so zwar, dass auch die Ableitung $\frac{dz}{d\zeta}$ daselbst an keiner Stelle null wird. Im Punkte $\zeta = i$ wird z unendlich, jedoch von der ersten Ordnung, so dass $z = \frac{c_1}{\zeta - i}$ $+ \mathfrak{P}(\zeta - i)$ also $\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{c_1}{(\zeta - i)^2} + \mathfrak{P}(\zeta - i)$ wird, mithin $\frac{dz}{d\zeta}(\zeta - i)^2$ regulär und von null verschieden bleibt. Durchläuft ζ die Achse ξ, so durchläuft z eindeutig die Peripherie des Polygons. Es werde angenommen, dass der Punkt a_0 zwischen den Punkten a_n und a_1 sich befindet. Den Eckpunkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ mögen dann die Punkte α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ auf der ξ-Achse entsprechen; dieselben werden in positiver Richtung in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen, wenn die Variabele z auf dem Polygon die Eckpunkte $a_1 \ldots a_n$ durchläuft. Da für den Punkt $\zeta = \infty$ z eindeutig und regulär bleibt (falls a_0 nicht gerade in eine Ecke verlegt wird, was auch möglich wäre), so ist ζ in der Umgebung von $z - a_0$ von der Form $\zeta = \frac{c}{z - a_0} + \ldots$ also $\frac{d\zeta}{dz} = \frac{-c}{(z - a_0)^2} \cdots$ und folglich muss $\zeta^2 \frac{dz}{d\zeta}$ auch für $\zeta = \infty$ regulär und von null verschieden sein. Die Umgebung einer Ecke a mit dem Winkel $\lambda\pi$ lässt sich durch die Funktion $u = (z - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ konform auf die Umgebung des Punktes $u = 0$ abbilden, so dass den beiden vom Punkte a ausgehenden Schenkeln die beiden Seiten einer Geraden bezüglich entsprechen. Jede andere Funktion ζ, durch welche die Umgebung der Ecke auf eine Gerade abgebildet wird, ist demnach so beschaffen, dass sie eine konforme Abbildung der Umgebung von u auf die Umgebung von ζ herbeiführt, wobei einer Geraden in u eine Gerade in ζ entspricht. Daraus kann geschlossen werden (Seite 15), dass ζ eine reguläre Funktion von u ist, die eindeutig umkehrbar sein muss, dass also in der Umgebung einer Ecke die Gleichung besteht:

$$\zeta - \alpha = c\,(z - a)^{\frac{1}{\lambda}} \ldots,$$

so dass $\frac{dz}{d\zeta}(\zeta - \alpha)^{1-\lambda}$ in der ganzen Umgebung des Punktes $\zeta = \alpha$ regulär ist. Bildet man also das Produkt

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta-\alpha_1)^{1-\lambda_1}(\zeta-\alpha_2)^{1-\lambda_2}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{1-\lambda_n}(\zeta-i)^2,$$

so bleibt dasselbe in der ganzen oberen Halbebene einschliesslich sämtlicher Punkte der Achse ξ eindeutig, regulär und von null verschieden, und nur in dem Punkte $\zeta=\infty$ wird dieser Ausdruck von der zweiten Ordnung null, weil $\frac{dz}{d\zeta}$ daselbst von dieser Ordnung verschwindet, während die Dimension der übrigen Faktoren null ist. Fügt man, um dieses zu beseitigen, eine Funktion zweiten Grades hinzu, die in der oberen Halbebene nicht null wird, und zwar den Faktor $(\zeta+i)^2$, so ist

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta-\alpha_1)^{1-\lambda_1}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{1-\lambda_n}(\zeta^2+1)^2=\psi$$

eine reguläre Funktion, die in der oberen Halbebene ($\eta\geqq 0$) weder null noch unendlich wird, für welche also auch $\log\psi$ in der oberen Halbebene nicht unendlich wird.

Das Argument von $\frac{dz}{d\zeta}$ ist konstant, solange ζ eine Strecke zwischen zwei Punkten α durchläuft, welche einer Seite des Polygons entspricht. Da beim Durchgang durch einen Punkt α das Produkt $(\zeta-\alpha)^{1-\lambda}\frac{dz}{d\zeta}$ regulär bleibt, so behält das Argument von $(\zeta-\alpha)^{1-\lambda}\frac{dz}{d\zeta}$ seinen konstanten Wert zu beiden Seiten eines Punktes α. Sonach ist der imaginäre Teil von $\log\psi$ eine harmonische Funktion, die am Rande der Halbebene einen konstanten Wert hat, folglich überall in der Halbebene konstant ist. Mithin ist ψ selbst eine Konstante, also

$$\frac{dz}{d\zeta}=C\frac{(\zeta-\alpha_1)^{\lambda_1-1}(\zeta-\alpha_2)^{\lambda_2-1}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{\lambda_n-1}}{(\zeta^2+1)^2}=\frac{f(\zeta)}{(\zeta^2+1)^2}.$$

Damit nun für $\zeta=i$ der Quotient von der Form $\frac{c_1}{(\zeta-i)^2}+\mathfrak{P}(\zeta-i)$ wird, also kein lineares Glied im Nenner enthält, muss $f(i)-if'(i)=0$ sein, was eine Relation zwischen den n Unbekannten α_n ausdrückt.

Das Argument in der Konstante C ist bestimmt durch die Richtung der Seite z, auf welcher der Punkt a_0 angenommen ist, welcher dem Punkte $\zeta=\infty$ entsprechen soll. Die abbildende Funktion ist

$$z-a_0=C\int_{-\infty}^{\zeta}\frac{(\zeta-\alpha_1)^{\lambda_1-1}(\zeta-\alpha_2)^{\lambda_2-1}\ldots(\zeta-\alpha_n)^{\lambda_n-1}}{(\zeta^2+1)^2}\,d\zeta.$$

Der Modul der Konstanten C, sowie die Werte von $\alpha_1\ldots\alpha_n$ sind eindeutig bestimmt, sobald das Polygon z festgelegt ist; sie sind aus den transcendenten Gleichungen zu entnehmen:

$$a_{k+1} - a_k = C \int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{(\zeta - \alpha_1)^{\lambda_1 - 1} \ldots (\zeta - \alpha_n)^{\lambda_n - 1}}{(\zeta^2 + 1)^2} \, d\zeta$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots n$, wobei $\alpha_0 = \infty$. Die Integrale können auch längs der reellen Achse selbst gebildet werden, wenn man festsetzt, dass ein Faktor $(\zeta - \alpha)^{\lambda - 1}$ für $\zeta < \alpha$ das Argument $\pi(\lambda - 1)$ und für $\zeta > \alpha$ das Argument null erhält.

Bildet man die Halbebene konform auf einen Kreis der Ebene σ mit dem Radius 1 ab, mittels der Substitution $\zeta = i\frac{1+\sigma}{1-\sigma}$, wobei der Punkt $\zeta = \infty$ dem Punkte $\sigma = 1$ entspricht und den Punkten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Punkte $\beta_1 \ldots \beta_n$, also $\alpha = i\frac{1+\beta}{1-\beta}$, so ist

$$z - a_0 = C' \int\limits_1^{\sigma} \frac{(\sigma - \beta_1)^{\lambda_1 - 1} \ldots (\sigma - \beta_n)^{\lambda_n - 1}}{\sigma^2} \, d\sigma$$

die Funktion, durch welche das Äussere eines n-Ecks konform auf das Innere eines Kreises abgebildet wird, so dass dem Mittelpunkt $\sigma = 0$ der unendlich ferne Punkt, dem Peripheriepunkt $\sigma = 1$ ein bestimmter Punkt a_0 entspricht. Dabei muss die Relation erfüllt sein:

$$\frac{\lambda_1 - 1}{\beta_1} + \frac{\lambda_2 - 1}{\beta_2} + \ldots \frac{\lambda_n - 1}{\beta_n} = 0.$$

Für ein regelmässiges Polygon ist $\lambda = \left(1 + \frac{2}{n}\right)$; setzt man

$$z = \int\limits^{\sigma} \frac{(\sigma^n + 1)^{\frac{2}{n}}}{\sigma^2} \, d\sigma,$$

so erhält man die Abbildung der Aussenfläche dieses n-Ecks auf das Innere eines Kreises, wobei den Eckpunkten diejenigen Punkte entsprechen, für welche σ gleich der n^{ten} Wurzel aus -1 ist. Die Seite des Polygons hat alsdann die Länge:

$$\operatorname{mod} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{3\pi}{n}} \frac{(e^{ni\varphi} + 1)^{\frac{2}{n}}}{e^{i\varphi}} \, d\varphi.$$

Die explizite Darstellung der Greenschen Funktion für die Innen- oder Aussenfläche eines geradlinigen Polygones erfordert also die Lösung des Umkehrproblemes an einem Integrale, das überdies nur dann algebraisch ist, wenn sämtliche Winkel rationale Teile von

2π sind. Der algebraische Charakter des Problemes tritt aber hervor, wenn man die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung entwickelt, von deren Lösung zugleich das allgemeinere Problem, die Abbildung eines von Kreisbogen gebildeten Polygones auf die Halbebene abhängt. Für diese Differentialgleichung wird auch der Unterschied zwischen der Abbildung der Innenfläche und der Aussenfläche eines Polygones unwesentlich, da der Differentialausdruck in derselben bei linearer Transformation invariant bleibt.

Die Bildung der Differentialgleichung zweiter Ordnung für das einfach zusammenhängende, von Kreisbogen begrenzte Polygon ist von Herrn Schwarz (Journal f. Math. Bd. 70) angegeben worden. Die geometrische Bedeutung der Differentialinvariante hat Herr Pochhammer (ebd. Bd. 76) erörtert.

Dieselbe Differentialgleichung in entsprechender Erweiterung entwickelte Riemann für eine von Kreisen begrenzte, mehrfach zusammenhängende Fläche in dem Fragment: „Über das Gleichgewicht der Elektrizität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt“ (Ges. Werke S. 413). In vollständiger Weise aber ist sie von Herrn Schottky in der früher genannten reichhaltigen Arbeit über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen behandelt worden.

deduktivem Wege die Gesetze komplizierterer Erscheinungen zu gewinnen sucht, so ist man freilich genötigt, manche überlieferte Vorstellung auszuscheiden oder ihr eine andere als die übliche Bedeutung beizulegen; dadurch wird aber das von der Geometrie zu verarbeitende Material auf seinen wahren Umfang zurückgeführt und einer Reihe von Kontroversen der Boden genommen.

Diese Auffassung suchen die angekündigten „Vorlesungen“ durchzuführen. Sie beschäftigen sich aber im wesentlichen nur mit den projektivischen Eigenschaften der Figuren und gehen nicht weiter, als nötig erschien, um etwas Abgerundetes zu geben. Die Arbeit beginnt mit der Aufzählung der erforderlichen Grundbegriffe und Grundsätze und schließt mit der Einführung der Koordinaten und der Koordinatenrechnung für Punkte und Ebenen. Eine wesentliche Folge der oben entwickelten Auffassung ist es, daß der Begriff des Punktes erst in seiner letzten Gestalt die Merkmale erhält, welche man sonst von vornherein mit dem sog. „mathematischen Punkte“ zu verbinden pflegt. Die Maßbegriffe wurden zwar nicht vollständig ausgeschlossen, doch ist die Lehre von der Kongruenz nur bis zur Aufstellung des Polarsystems, worin jeder Ebene der Durchschnittspunkt ihrer Normalen entspricht, fortgeführt worden.

Pasch, Dr. Moritz, Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VIII u. 188 S.] Mit Figuren im Text. gr. 8. 1882. geh. n. *M* 3. 20.

Vielleicht wird für manche Zwecke eine Darstellung brauchbar sein, welche, wie die vorliegende, über die einleitenden Teile der Differential- und Integralrechnung nicht hinausgeht, ihren Gegenstand jedoch möglichst genau und ausführlich zu behandeln sucht. Die Schrift ist im Anschluß an Vorlesungen über Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie (hauptsächlich im Wintersemester 1878/79) ausgearbeitet worden. Da sie nur als Ergänzung zu Vorlesungen oder Lehrbüchern dienen soll, wurde der Stoff entsprechend begrenzt; so blieben z. B. die Differentialquotienten höherer Ordnung außer Betracht, ebenso die Anwendungen der Theorie; die Tangenten der ebenen Kurven, sowie Quadratur und Rektifikation sind nur herangezogen, um die Begriffsbildung zu erläutern. Für die trigonometrischen Funktionen kann die elementar-geometrische Definition bei der analytischen Untersuchung nicht den Ausgangspunkt bilden; indem jene Funktionen aus dem Kreisbogenintegral erzeugt wurden, bot sich zugleich Gelegenheit, den Begriff des Integrationsweges zu erweitern und die Periodizität ohne Zuziehung von komplexen Variabeln zu erklären. Zum Schluß werden die unendlichen Reihen, insbesondere die Potenzreihen besprochen und die Reihenentwickelungen der elementaren Funktionen gegeben.

Serret, J.-A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsche Uebersetzung von **G. Wertheim,** Lehrer an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. 2 Bände. 2. Aufl. gr. 8. 1878. 1879. *M* 19. —.

I. Band.	[VIII u. 528 S.]	1878.	n. *M* 9. —.
II. „	[VIII u. 574 S.]	1879.	n. *M* 10. —.

Es giebt kein Werk, welches die Theorie der Gleichungen in der Vollständigkeit und Klarheit, wie die dritte Auflage von *Serret, cours d'algèbre supérieure* behandelt, und welches so sehr den Ansprüchen genügt, die man an ein Handbuch zu stellen hat. Die vorliegende durchaus korrekte Übersetzung wird daher den deutschen Mathematikern sehr willkommen sein. Bedeutende Änderungen sind nirgends vorgenommen, an einzelnen Stellen nur kleine Zusätze gemacht, so ist z. B. die Tabelle der Nr. 316 nach Jacobi vervollständigt worden u. s. w

——— membre de l'Institut et du Bureau des longitudes, **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.** Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von **Axel Harnack,** Dr. und Professor am Polytechnikum zu Dresden. Zwei Bände. Mit in den Text gedruckten Figuren. gr. 8. geh. n. *M* 24. 40.

Einzeln:

I. Band:	Differentialrechnung. [X u. 567 S.] 1884.	n. *M* 10. —.
II. „	1. Hälfte: Integralrechnung. [VIII u. 380 S.] 1885.	n. *M* 7. 20.
II. „	2. „ Differentialgleichungen. [VI u. 388 S.] 1885.	n. *M* 7. 20.

Wertheim, G., Oberlehrer an der Real- u. Volksschule der israelitischen Gemeinde in Frankfurt a. M., **Elemente der Zahlentheorie.** [IX u. 382 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M* 8. 40.

Dies Buch hat den Zweck, das Wichtigste aus den Elementen der Zahlentheorie in einfacher und übersichtlicher Darstellung zu geben. Es werden darin also die Sätze, welche die Teilbarkeit der Zahlen betreffen, die Kongruenzen ersten und zweiten Grades, die binomische Kongruenz und die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten behandelt. Jede dem Verständnis eröffnete Wahrheit wird durch Beispiele und darauf bezügliche mehr oder weniger vollständig gelöste Aufgaben befestigt. Durch diese wiederholte Anwendung hofft der Verfasser den Studierenden in den wirklichen Besitz der vorgetragenen Lehren zu setzen und ihn zu einem genußreichen Studium der klassischen Werke und Arbeiten über Zahlentheorie zu befähigen.